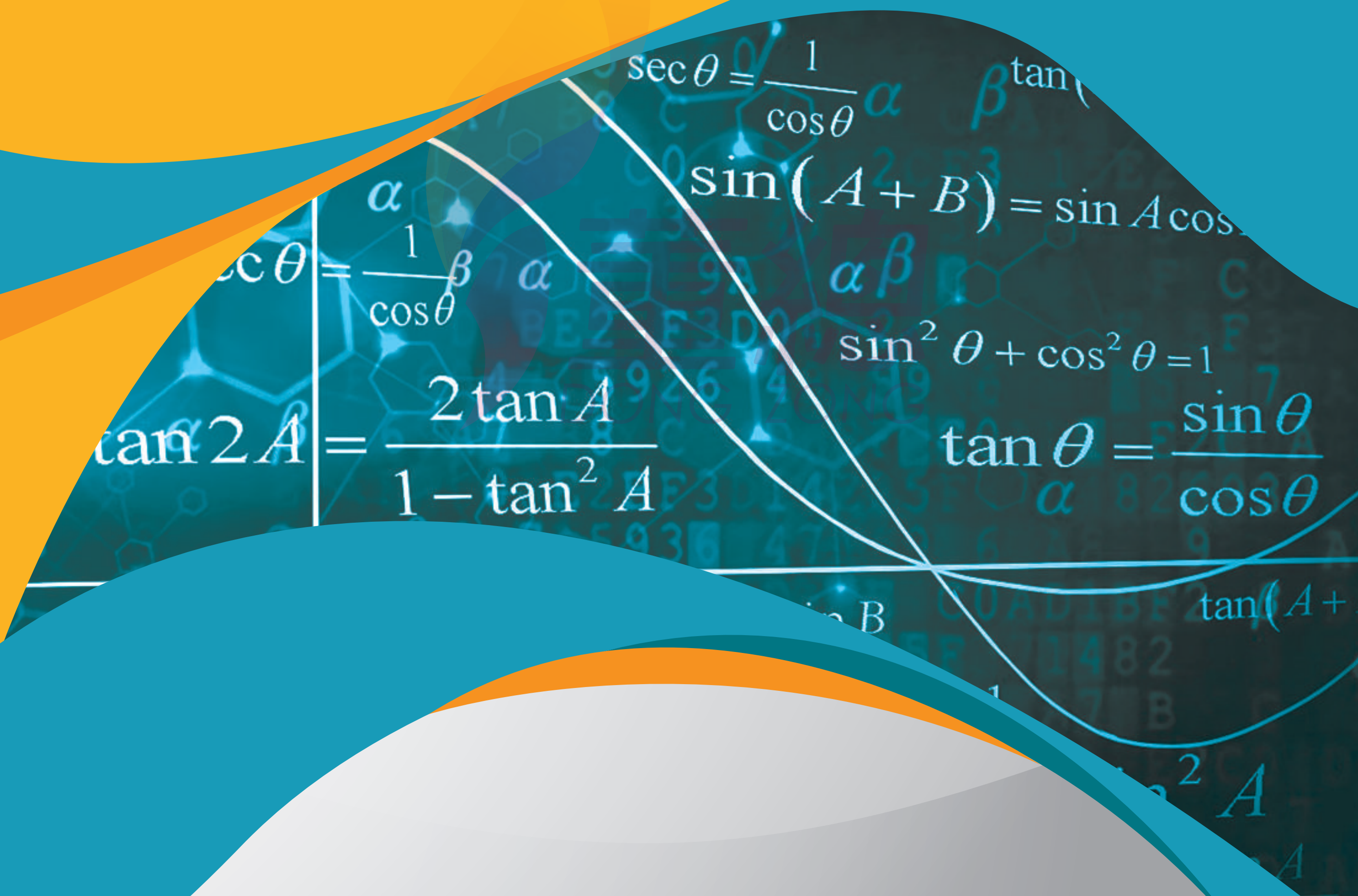
马来西亚华文独中教科书

数学

高一上册



董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

独中教育
核心素养图

终身学习者
Lifelong Learner
自主学习
Self-Directed Learning
沟通协作
Communication and Collaboration
社会参与
Social Participation
积极态度与正面价值
Proactive Attitude and Positive Values
领导能力与团队合作
Leadership and Teamwork
语言素养与沟通表达
Languages and Communication
品德素质与人文关怀
Ethics and Humanitarianism
国家认同与多元文化
Patriotism and Multicultural Awareness
全球视野与永续发展
Global Perspectives and Sustainable Development
身心平衡与美感素养
Physical-Mental Wellbeing and Aesthetic Appreciation
善用知识与运用科技
Knowledge and Technology Applications
创意思维与解决问题
Innovative Thinking and Problem Solving

《数学》高一上册

美术编辑： 曹薇华
排　　版： 林樱颖

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School（MICSS）Working Committee

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Vinlin Press Sdn. Bhd.

版次：
2025 年 10 月第 1 版

印次：
2025 年 10 月第 1 次印刷

编审团队

学科顾问 ：郑章华

编审委员 ：陈玉丽　陈志丰　陈俊文　苏民胜　李鸿聪　张锦发　林艾嘉　林汶良　姚和兴　郭丽梅　萧子良

编写人员 ：陈志丰　林盼龙　郭丽梅　戴景正

责任编辑 ：周孝贤

（按姓氏笔画排列）

鸣　谢

本书承蒙国内外学者、独中数学科教师等提供建设性意见，并协助编写及审稿，谨此统致谢忱。

董教总华文独中工委会统一课程委员会　启

2025 年 8 月

编辑说明

1. 这套《高中数学》是根据董教总全国华文独中工委会所拟定的“高中数学课程标准”编写而成。在拟订课程标准的过程中，除采用部分旧版《高中数学》的课程内容，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KSSM）、SPM、STPM 及各国的课程标准和教材。

2. 这套《高中数学》是为全国华文独中的高中文科、商科与技术科学生编写的。全套教材共分六册，分三年使用。每册内容依据每周 5 节、每节 40 分钟的教学时间编写。各校可按个别情况安排授课时数。

3. 这套教材共有 29 章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学与微积分等。

4. 本书是高一上册，提供高中一年级上半年使用。

5. 本书设有“学习目标”、“温故知新”、“想一想”、“数学橱窗”、“补充资料”、“注意”及“探索活动”栏目。设置以上栏目，是为了方便学生掌握学习重点，启发学生思考，并增进学习效果。

6. 本书每节都设有随堂练习及习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。

7. 本书附有中英名词对照，供学习参考。习题的答案也都附在书末。

8. 本教材如有未尽善处，请不吝指正，以作修订参考。

董教总华文独中工委会统一课程委员会
《高中数学》编审小组
2025 年 8 月

目录

4 无理式

5 函数

6 不等式

想象一下，你站在广阔的校园里，手持一张能精准定位的卫星地图，寻找教室、食堂或朋友聚会点。这一切，都离不开**直角坐标系**——将现实与数学连接的强大工具。

四百多年前，伟大的数学家笛卡尔 (René Descartes) 创立了这套语言，如今，它早已融入日常：从地图导航到工程设计，再到宇宙探测。

直角坐标系不仅是公式和定理，更像一把钥匙，帮你测量距离、定位坐标、分析直线关系，揭示数学与现实的紧密联系。

掌握这些知识，你将成为用数学解决实际问题的创造者，未来或许能设计建筑、优化交通，甚至为环保出力。

准备好了吗？让我们一起开启探索直角坐标系的奇妙旅程，发现数学世界的无限可能！

1 直角坐标系与直线

学习目标

★ 能利用距离公式计算两点之间的距离

★ 掌握分比公式，计算分点的坐标

★ 能利用三角形的顶点坐标计算三角形的面积

★ 能利用多边形的顶点坐标计算多边形的面积

★ 理解斜率的定义

★ 掌握两条直线平行与垂直的条件

★ 能根据不同的已知条件求出直线的方程式

★ 理解两条直线的交点的位置关系及掌握交点的求法

★ 掌握点到直线的距离公式，并能灵活应用

1.1 直角坐标系与距离公式

直角坐标系

直角坐标系 (rectangular coordinate system) 也称为笛卡尔坐标系 (Cartesian coordinate system)。在初中，我们学习如何使用序偶在直角坐标系上表示点的位置。坐标平面上的 x 轴与 y 轴把平面分为四个区域，称为象限 (quadrant)。如图 1-1 所示，我们把这四个区域分别称为第一象限，第二象限，第三象限以及第四象限。x 轴与 y 轴上的点不属于任何象限。

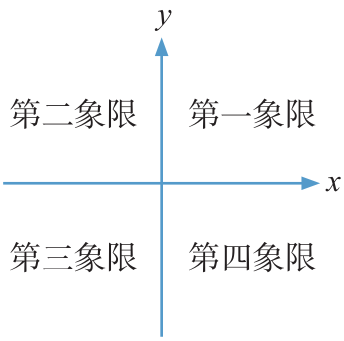


图 1-1

随堂练习 1.1a

以下各点分别属于哪个象限？

$A(-3, 1), B(5, -2), C(-6, -1), D(0, 2)$

想一想 1 我们如何从坐标判别一个点是属于哪个象限？

距离公式

在坐标平面上，在得知任意两点的坐标后，可使用距离公式来求出两点之间的距离。

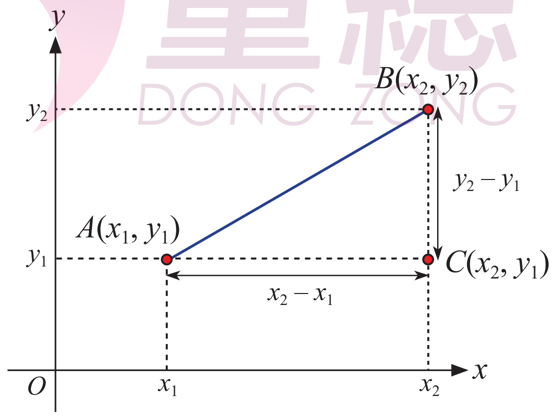


图 1-2

如图 1-2 所示，$A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 是直角坐标系中的任意两点。作 AC 平行于 x 轴，BC 平行于 y 轴，则点 C 的坐标是(x_2, y_1)。因此，在直角三角形 ABC 中，由毕氏定理可得

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

从而求得 A，B 两点之间的距离：

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

例题 1

求两点 $A(2, 4)$ 及 $B(-3, 16)$ 之间的距离。

解
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-3-2)^2+(16-4)^2} \\ &= \sqrt{25+144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

随堂练习 1.1b

求连接两点$(-1, 2)$ 及 $(-5, 5)$ 的线段长度。

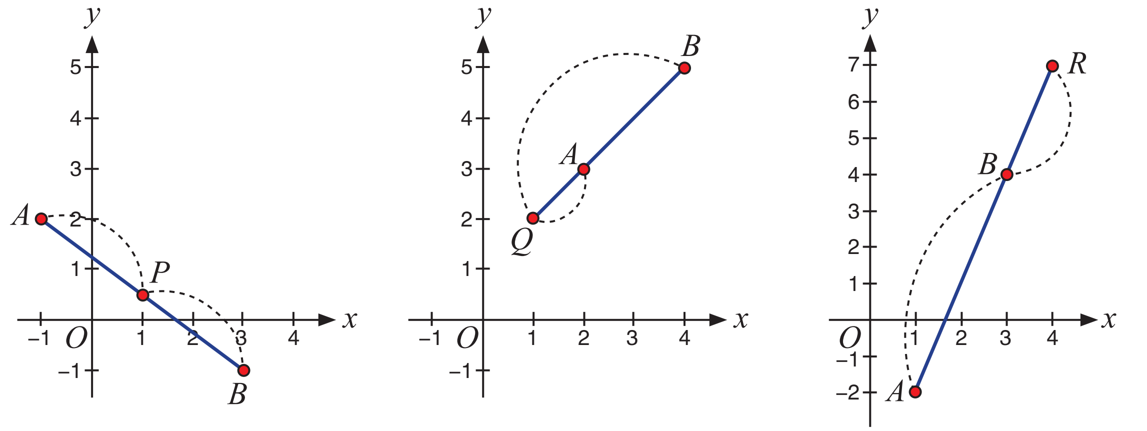
习题 1.1

1. $A(3, -7)$ 及 $B(-1, 4)$ 是一个正方形相邻的两个顶点，求这个正方形的面积。
2. 已知某三角形的三个顶点分别为 $A(-4, 0)$，$B(3, 4)$ 及 $C(4, 1)$。证明此三角形为等腰三角形。

1.2 定比分点

给定 A, B 两点，如果我们能在直线 AB 上找到点 P 使得 $AP : PB$ 等于一已知比值，点 P 就是线段 AB 的定比分点。

如图 1-3(a) 所示，若分点P在线段 AB 上，且 $AP : PB = m : n$，我们说 P 内分 (divide internally) AB 成 $m : n$。P 叫做内分点 (internal division point)。又如图 1-3(b)、(c) 所示，若分点 Q 在线段 AB 的延长线上，且 $AQ : QB = m : n$，我们说 Q 外分 (divide externally) AB 成 $m : n$。Q 叫做 AB 的外分点 (external division point)。



(a) P 内分线段 AB 成 $1:1$　(b) Q 外分线段 AB 成 $1:3$　(c) R 外分线段 AB 成 $3:1$

图 1-3

想一想 2　我们如何知道线段 AB 的外分点比较靠近 A 或是靠近 B?

例题 2

已知 $A(-7, 1)$，$B(3, 6)$ 两点，求内分线段 AB 成 $3:2$ 的点 P 的坐标。

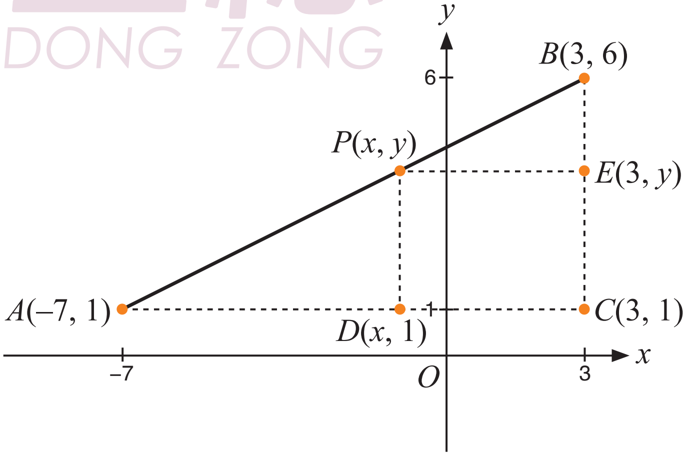
解　设 P 的坐标为 (x, y)。如下图所示，过 A 的水平线分别与过 P 及 B 的铅垂线相交于 D 及 C，过 P 的水平线交 BC 于 E。于是，$\Delta APD \sim \Delta PBE$。

$$\frac{AD}{PE} = \frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x-(-7)}{3-x} = \frac{3}{2}$$

$$9 - 3x = 2x + 14$$

$$x = -1$$



同理，

$$\frac{PD}{BE} = \frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{y-1}{6-y} = \frac{3}{2}$$

$$2y - 2 = 18 - 3y$$

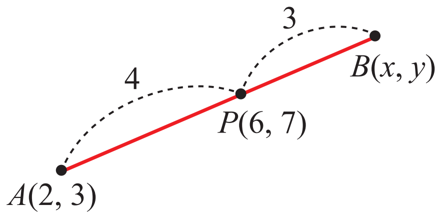
$$y = 4$$

$\therefore$ P 的坐标为 $(-1, 4)$。

例题 3

已知点 $A(2, 3)$ 及点 B，点 $P(6, 7)$ 内分 AB 成 $4 : 3$，求点 B 的坐标。

解 设点 B 的坐标为 (x, y)，作示意图如右。



利用相似比，可以列方程式：

$$\frac{6-2}{x-6} = \frac{4}{3}$$
$$4x - 24 = 12$$
$$x = 9$$

$$\frac{7-3}{y-7} = \frac{4}{3}$$
$$4y - 28 = 12$$
$$y = 10$$

$\therefore$ B 的坐标为 $(9, 10)$。

随堂练习 1.2a

已知 P，B 两点的坐标分别为 $(-2, -3)$ 及 $(-11, -15)$。若点 P 内分线段 AB 成 $2 : 3$，求点 A 的坐标。

已知两点 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$，点 $P(x, y)$ 内分线段 AB 成 $m : n$，如图 1-4 所示。

由于 $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n}$，由图可得 $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{m}{n}$，即

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$
$$nx - nx_1 = mx_2 - mx$$
$$(m+n)x = mx_2 + nx_1$$
$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

同理可得，

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

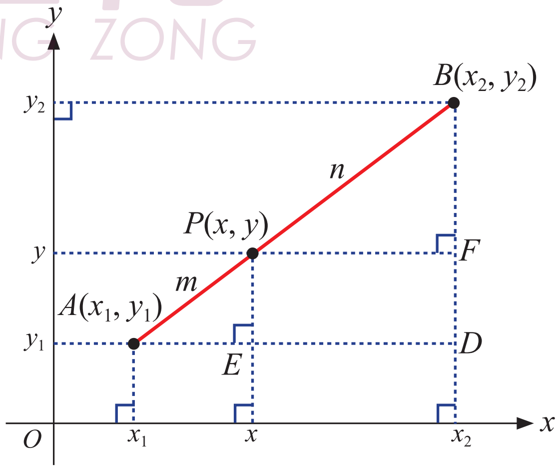


图 1-4

因此，将线段 AB 内分成 $m:n$ 的点 $P(x, y)$ 的坐标为

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$$

这就是分比公式。

例题 4

已知两点 A 及 B 的坐标分别是 $(-2, 5)$ 及 (p, q)。若点 $P(0, 8)$ 内分线段 AB 成 $1:3$，求点 B 的坐标。

解 由分比公式得

$$0 = \frac{1 \times p + 3(-2)}{1 + 3} \qquad 8 = \frac{1 \times q + 3 \times 5}{1 + 3}$$

$$0 = \frac{p - 6}{4} \qquad 32 = q + 15$$

$$p = 6 \qquad q = 17$$

$\therefore$ B 的坐标为 $(6, 17)$。

随堂练习 1.2b

用分比公式检验例题 3 的答案。

当 P 内分 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 的线段成 $1:1$ 时，我们称 P 为 AB 的中点 (midpoint)。由分比公式可得

中点公式：

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

想一想 3

中点公式跟统计学的哪个概念相近？

例题 5

已知两点 $A(2, -4)$ 及 $M(-1, 3)$，且 M 是线段 AB 的中点。求点 B 的坐标。

解 设点 B 的坐标为 (x, y)。AB 的中点坐标为 $\left(\dfrac{2+x}{2}, \dfrac{-4+y}{2}\right)$。

$$\frac{2+x}{2} = -1 \qquad \frac{-4+y}{2} = 3$$

$$2 + x = -2 \qquad -4 + y = 6$$

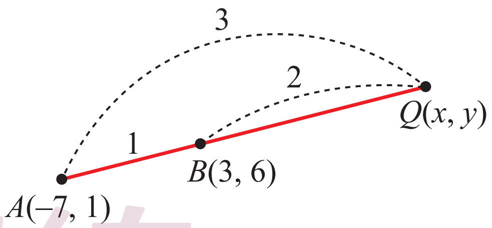
$$x = -4 \qquad y = 10$$

$\therefore$ B 的坐标为 $(-4, 10)$。

例题 6

已知两点 $A(-7, 1)$ 及 $B(3, 6)$，若 Q 外分 AB 成 $3 : 2$，求点 Q 的坐标。

解 已知 $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{3}{2}$，设 Q 的坐标为 (x, y)。



把 B 看成内分点，则 $AB : BQ = 1 : 2$。

根据内分点公式，

$$\frac{1 \times x + 2(-7)}{1+2} = 3 \qquad \frac{1 \times y + 2 \times 1}{1+2} = 6$$

$$x = 23 \qquad y = 16$$

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(23, 16)$。

注意

从比值 $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{3}{2}$，我们得知 $AQ > QB$。因此点 Q 的位置较接近点 B。

随堂练习 1.2c

已知线段 AB 的端点坐标为 $A(2, -1)$ 及 $B(6, 7)$。若点 P 是线段 AB 的外分点且 $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{3}{1}$，求点 P 的坐标。

习题 1.2

1. 一条线段的其中一个端点为 $(-1, 2)$，中点为 $(2, 1)$，求它的另一个端点的坐标。

2. 已知 $P(4, -3)$，$Q(8, 2)$ 及 $R(1, 6)$ 是平行四边形 $PQRS$ 的其中三个顶点，求点 S 的坐标。

3. 已知 $A(1, 4)$，$B(3, -9)$，$C(-5, 2)$ 是一个三角形的三个顶点，求由点 B 到 AC 所作出中线之长度。

4. 已知 $M(5, -3)$，$N(-1, 7)$ 两点。求
   (a) 将线段 MN 内分成 $3 : 4$ 的点 S 的坐标；
   (b) 将线段 MN 外分成 $3 : 4$ 的点 T 的坐标。

5. 已知 $A(2, -1)$，$B(3, 4)$ 两点，点 Q 在线段 AB 的延长线上使得 $4QA = 3QB$，求点 Q 的坐标。

6. 已知两点 $A(-1, m+1)$ 及 $B(5k-2, -5)$，若点 $P\left(-\frac{9}{5}, k\right)$ 内分 AB 成 $2 : 3$，求 m。

1.3 多边形的面积

在高中，我们将利用多边形各顶点的坐标来求其面积。

三角形的面积

如图 1-5 所示，ΔABC 的三个顶点为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 及 $C(x_3, y_3)$。作垂线 AF，CE 及 BD 分别交 x 轴于 F，E 及 D 三点，则

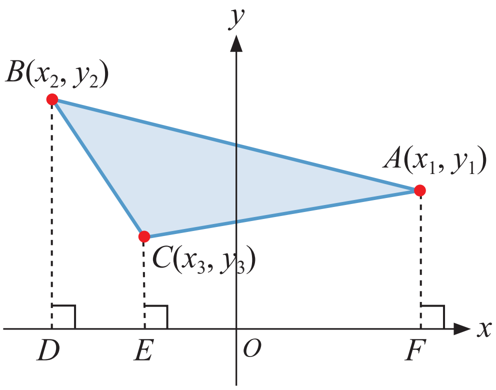


图 1-5

ΔABC 的面积 = 梯形 $FABD$ 的面积 – 梯形 $ECBD$ 的面积 – 梯形 $FACE$ 的面积

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(AF + BD) \times DF - \frac{1}{2}(CE + BD) \times DE - \frac{1}{2}(AF + CE) \times EF \\
&= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_1 - x_3) \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3) \\
&= \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)]
\end{aligned}
$$

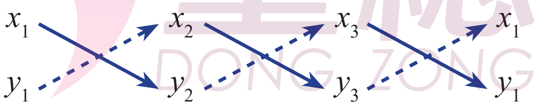
在上述的推导中，三角形的顶点是按逆时针方向排列，所得的公式是三角形的面积。若顶点按逆时针排列，所得的结果为正值；若顶点按顺时针排列，所得的结果为负值。但是，实际面积的值恒等于其绝对值。因此，

若 ΔABC 的三个顶点为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 及 $C(x_3, y_3)$，则

ΔABC 的面积 $= \dfrac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)|$。

这个公式可以用以下的方法帮助记忆:

1. 将 ΔABC 三个顶点的坐标排列如下：



其中第一点的坐标必须重复写在最后一列。

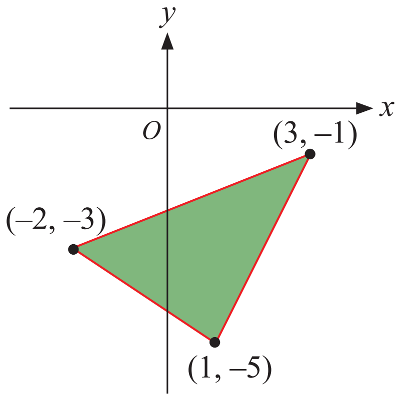
2. 将每个向下箭头的两数乘积之和，减去向上箭头的两数乘积之和，将结果取绝对值再除以 2，就可以得到三角形的面积。

例题 7

已知三角形的顶点为 (–2, –3)，(1, –5)，(3, –1)，求此三角形的面积。

解

$$\begin{array}{cccc} -2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -5 & -1 & -3 \end{array}$$



三角形的面积

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left|[(-2)(-5)+(1)(-1)+(3)(-3)]\right. \\ &\quad \left.-[(-3)(1)+(-5)(3)+(-1)(-2)]\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(10-1-9)-(-3-15+2)\right| \\ &= 8 \end{aligned}$$

例题 8

已知 ΔABC 的三个顶点分别为 $A(1, 4)$、$B(-2, -1)$ 及 $C(s, s+3)$。若 ΔABC 的面积等于 4，求 s 的值。

解

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & s & 1 \\ 4 & -1 & s+3 & 4 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\left|[-1-2(s+3)+4s]-[-8-s+s+3]\right| = 4$$

$$\frac{1}{2}|2s-2| = 4$$

$$|2s-2| = 8$$

$$2s-2=8 \quad \text{或} \quad 2s-2=-8$$

$$s=5 \qquad\qquad s=-3$$

想一想 4 在什么情况下，ΔABC 的面积等于 0？

随堂练习 1.3a

求以下各点为顶点的三角形的面积：

(a) (2, –3)，(3, 2)，(–2, 5)

(b) (–3, 2)，(5, –2)，(1, 3)

多边形的面积

已知四边形 $ABCD$ 的顶点按逆时针的顺序为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$ 及 $D(x_4, y_4)$。我们可以将四边形的面积表示成两个三角形的面积之和，如图 1-6 所示。

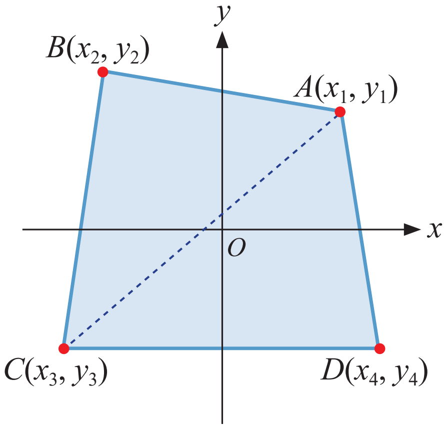


图 1-6

四边形 $ABCD$ 的面积

$= \Delta ABC$ 的面积 $+ \Delta ACD$ 的面积

$$= \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)]$$

$$+ \frac{1}{2}[(x_1y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_3y_1 + x_4y_3 + x_1y_4)]$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)]$$

用箭头向下的两数乘积之和，减去箭头向上的两数乘积之和，再将结果除以 2，便得到四边形的面积。但必须注意，四个顶点必须依序排列，逆时针排列得正值，顺时针排列得负值。因此，

> 若一个四边形的顶点依序为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 及 (x_4, y_4)，则
> 四边形的面积 $= \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)|$。

上述的公式可以用以下的方法帮助记忆：

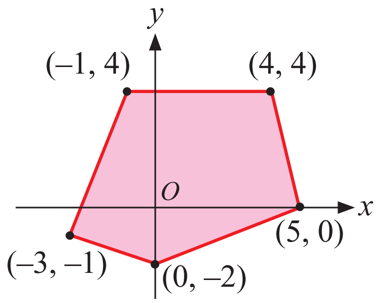
$$\begin{matrix} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_1 \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & y_1 \end{matrix}$$

五边形或多于五边的多边形的面积，都可仿照以上的方法计算。惟，求面积之前必须先确定各顶点在坐标平面上的位置。接着，任取一顶点作为起点，然后将其余顶点依逆时针排列，并将起点的坐标重复写在最后一列。最后，才进行面积计算。

例题 9

求以 (–3, –1)，(–1, 4)，(5, 0)，(4, 4) 及 (0, –2) 为顶点的凸五边形 (convex pentagon) 的面积。

解 先在坐标平面上标出各点，如右图所示。
从任意点开始，依逆时针将各顶点的坐标写下。



$$\begin{matrix} 4 & -1 & -3 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & -2 & 0 & 4 \end{matrix}$$

五边形面积

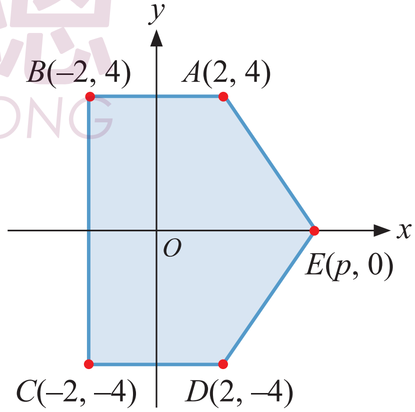
$$= \frac{1}{2}[(16 + 1 + 6 + 0 + 20) - (-4 - 12 + 0 - 10 + 0)]$$

$$= \frac{69}{2}$$

例题 10

一个凸五边形的面积为 44，其顶点分别是 $A(2, 4)$，$B(-2, 4)$，$C(-2, -4)$，$D(2, -4)$ 及 $E(p, 0)$，求 p 的值。

解 先在坐标平面上标出各点，如右图所示。
从任意点开始，依逆时针将各顶点的坐标写下。



$$\begin{matrix} 2 & -2 & -2 & 2 & p & 2 \\ 4 & 4 & -4 & -4 & 0 & 4 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2}[(8 + 8 + 8 + 0 + 4p) - (-8 - 8 - 8 - 4p)] = 44$$

$$8p + 48 = 88$$

$$p = 5$$

随堂练习 1.3b

求以 (2, –1)，(5, 6)，(3, 8)，(–4, 4) 各点为顶点的多边形的面积。

习题 1.3

1. 已知 ΔABC 的三个顶点为 $A(2, 5)$，$B(-4, 3)$，$C(0, -2)$，求 ΔABC 的面积。

2. 已知 ΔABC 的面积等于 20，它的其中两个顶点为 $A(3, 4)$ 及 $B(-2, 1)$，顶点 C 落在 y 轴上。求点 C 的坐标。

3. 已知 ΔPQR 的三个顶点分别是 $P(x, x+2)$，$Q(1, -4)$ 及 $R(6, 2)$，若 ΔPQR 的面积等于 24，求点 P 的坐标。

4. 已知 $ABCD$ 是风筝形，$AB = AD$，$CB = CD$。若 A，C，D 的坐标分别为 $(2, 3)$，$(-2, -1)$ 及 $(2, -4)$，求 $ABCD$ 的面积。

5. 求以 $(3, 8)$，$(1, -1)$，$(-2, 3)$ 及 $(6, 2)$ 为顶点的四边形的面积。

6. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点为 $A(-4, 0)$，$B(t+1, 2t)$，$C(8, 6)$ 及 $D(2, -8)$。若此四边形的面积为 96，且 $t > 0$，求 t 的值。

1.4 直线的斜率

斜率在生活中有广泛的应用，例如：楼梯和无障碍坡道的设计。乘车出游时，同学们可能见过道路两旁出现如图 1-7 所示的标志，此标志意在提醒司机们前方有斜坡。图中的 10% 表示路面的坡度为 1 : 10，即每前进 10 m 上升 1 m 的意思。

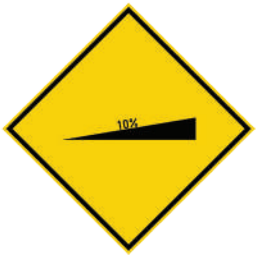
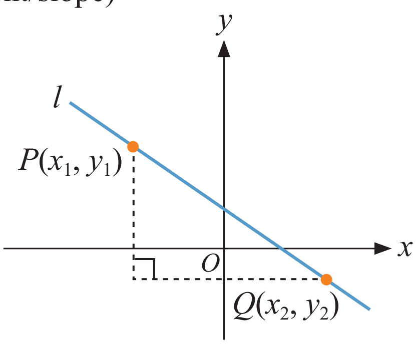


图 1-7

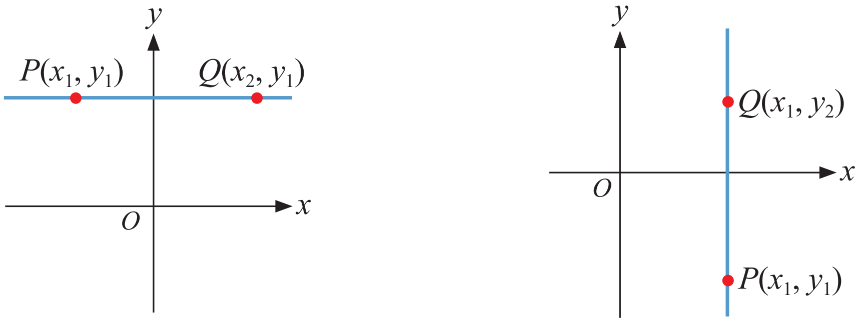
给定一条直线 l，我们可以定义其斜率 (gradient/slope) 如下：

> 设 $P(x_1, y_1)$ 及 $Q(x_2, y_2)$ 是直线上的任意两点，
>
> 直线的斜率 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$。



从定义可知，当直线平行于 x 轴时，其斜率为 0，见图 1-8(a)。

当直线平行于 y 轴时，由于分母为 0，斜率不存在，见图 1-8(b)。



(a) 斜率为 0　　(b) 斜率不存在

图 1-8

探索活动 1

目的：探索经过两点的直线的斜率。

工具：https://www.geogebra.org/m/hrz272pq

步骤：1. 左右水平移动点 A，观察直线 AB 的斜率的大小与正负符号变化，以及倾斜程度。

2. 上下垂直移动点 B，观察直线 AB 的斜率的大小与正负符号变化，以及倾斜程度。

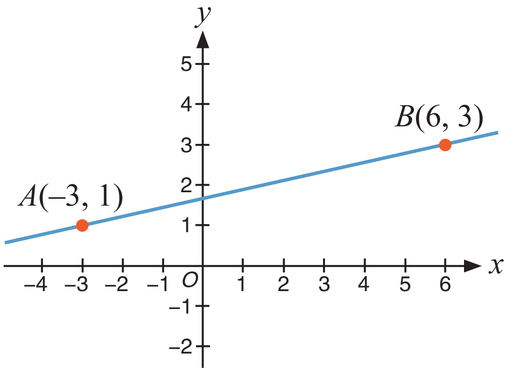
例题 11

求经过下列两点的直线斜率：

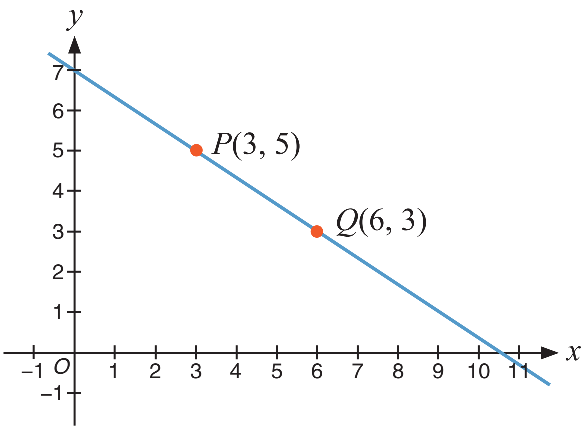
(a) $A(-3, 1)$ 及 $B(6, 3)$

(b) $P(3, 5)$ 及 $Q(6, 3)$

解 (a) $m_{AB} = \dfrac{3-1}{6-(-3)} = \dfrac{2}{9}$



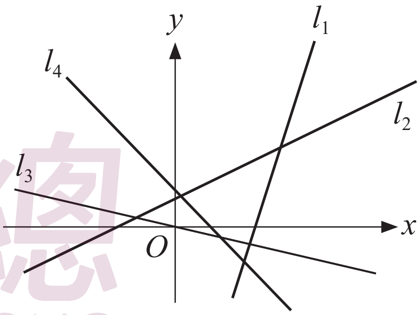
(b) $m_{PQ}=\frac{3-5}{6-3}=-\frac{2}{3}$



斜率就是沿着直线移动，当横轴增加一个单位时，纵轴方向所改变的量。

随堂练习 1.4a

1. 如右图所示，直线 l_1、l_2、l_3、l_4 的斜率分别为 m_1、m_2、m_3、m_4。比较这四个斜率的大小。



第 1 题用图

2. 求经过 $A(2, -1)$ 及 $B(5, 7)$ 两点的直线的斜率。

3. 已知直线 l 经过 $C(1, -2)$ 及 $D(5, k)$ 两点，且其斜率为 2。求 k 的值。

两条直线平行的条件

若直线 l_1 及 l_2 都不平行于 y 轴，l_1 及 l_2 的斜率分别为 m_1 及 m_2，则

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

两条直线垂直的条件

如图 1-9 所示，设直线 l_1 及 l_2 的斜率分别为 m_1 及 m_2，l_1 与 l_2 垂直，且相交于点 $C(p, q)$。l_1 及 l_2 分别与 x 轴相交于 $A(x_1, 0)$ 及 $B(x_2, 0)$ 。作垂线 CD 交 x 轴于 $D(p, 0)$。由 $\Delta ACD \sim \Delta CBD$，所以

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$$

$$\frac{q-0}{x_2-p} = \frac{p-x_1}{q-0}$$

$$\frac{q-0}{p-x_1} \cdot \frac{q-0}{p-x_2} = -1$$

$$m_1 m_2 = -1$$

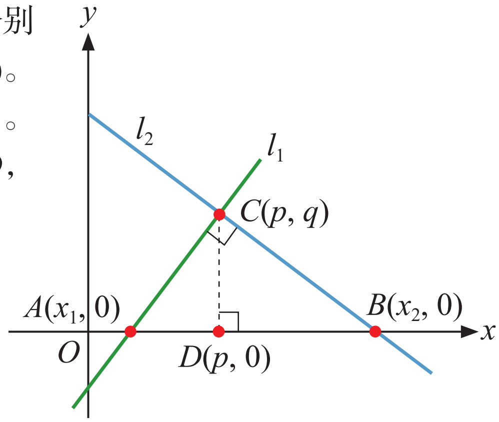


图 1-9

若直线 l_1 及 l_2 都不平行于 x 轴及 y 轴，l_1 及 l_2 的斜率分别为 m_1 及 m_2，则

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

例题 12

设 A，B 及 C 三点的坐标分别是 $(1, 2)$，$(3, 6)$ 及 $(5, 10)$。证明 A，B，C 三点共线。

解 AB 的斜率 $m_{AB} = \dfrac{2-6}{1-3} = 2$

BC 的斜率 $m_{BC} = \dfrac{6-10}{3-5} = 2$

线段 AB 与 BC 的斜率相等，且两线段含有公共点 B。

$\therefore A$，B，C 三点共线 (collinear)。

例题 13

若 $P(1, 2)$，$Q(4, k)$ 及 $R(10, 8)$ 在同一直线上，求 k 的值。

解 P，Q，R 三点共线，所以 $m_{PQ} = m_{QR}$。

PQ 的斜率 $m_{PQ} = \dfrac{k-2}{4-1} = \dfrac{k-2}{3}$

QR 的斜率 $m_{QR} = \dfrac{k-8}{4-10} = \dfrac{k-8}{-6}$

$$m_{PQ} = m_{QR}$$

$$\frac{k-2}{3} = \frac{k-8}{-6}$$

$$-6k + 12 = 3k - 24$$

$$k = 4$$

例题 14

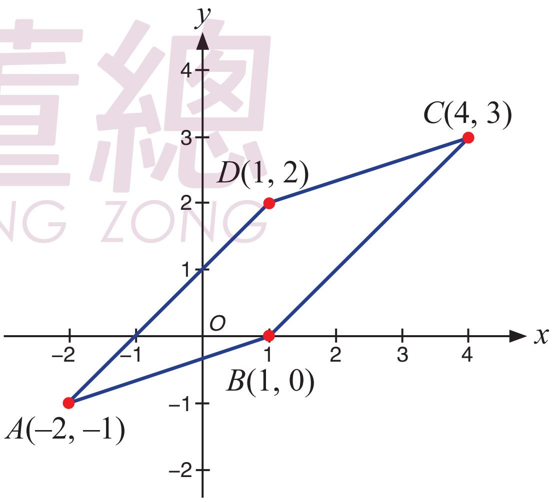
证明 $A(-2, -1)$，$B(1, 0)$，$C(4, 3)$ 及 $D(1, 2)$ 是一平行四边形的四个顶点。

解 $m_{AB} = \dfrac{0-(-1)}{1-(-2)} = \dfrac{1}{3}$

$m_{DC} = \dfrac{3-2}{4-1} = \dfrac{1}{3}$

$\because m_{AB} = m_{DC}$

$\therefore AB // DC$



$m_{AD} = \dfrac{2-(-1)}{1-(-2)} = \dfrac{3}{3} = 1$

$m_{BC} = \dfrac{3-0}{4-1} = \dfrac{3}{3} = 1$

$\because m_{AD} = m_{BC}$

$\therefore AD // BC$

$\therefore A$，B，C 及 D 是平行四边形的四个顶点。

随堂练习 1.4b

1. 若 $A(1, -2)$ 及 $B(4, 3)$ 的连线平行于 $C(0, y)$及 $D(2, -1)$ 的连线，求 y 的值。
2. 证明 $A(3, -5)$，$B(5, -3)$，$C(-1, 3)$ 及 $D(-3, 1)$是一平行四边形的四个顶点。

例题 15

已知 A，B 及 C 三点的坐标分别是 $(-2, 5)$，$(k, -1)$ 及 $(5, 1)$。若 $AB \perp BC$，求 k 的值。

解

$$\because AB \perp BC$$

$$\therefore m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$$

$$\left[\frac{-1-5}{k-(-2)}\right]\left[\frac{1-(-1)}{5-k}\right] = -1$$

$$\left(\frac{-6}{k+2}\right)\left(\frac{2}{5-k}\right) = -1$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$(k-1)(k-2) = 0$$

$$k - 1 = 0 \quad \text{或} \quad k - 2 = 0$$

$$k = 1 \qquad\qquad k = 2$$

例题 16

已知四点 A，B，C，D 的坐标分别是 $(-1, -2)$，$(5, 1)$，$(4, 3)$，$(8, 5)$。证明 $AB \perp BC$ 及 $AB // CD$。

解 AB 的斜率 $m_{AB} = \dfrac{1-(-2)}{5-(-1)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

BC 的斜率 $m_{BC} = \dfrac{3-1}{4-5} = -2$

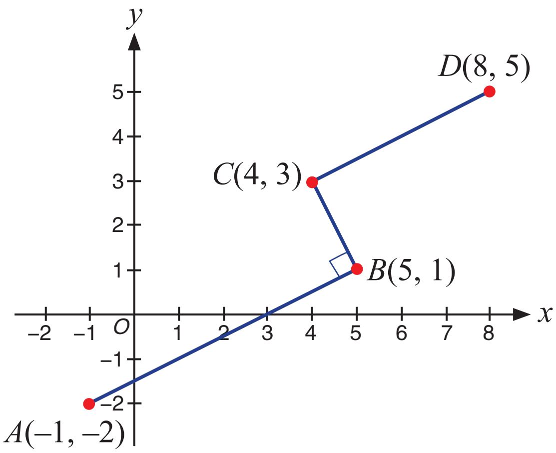
CD 的斜率 $m_{CD} = \dfrac{5-3}{8-4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$

$\therefore AB \perp BC$

又，$m_{AB} = m_{CD}$

$\therefore AB // CD$



例题 17

证明 $A(2, -2)$，$B(8, 4)$，$C(5, 7)$ 及 $D(-1, 1)$ 是一长方形的四个顶点。

解

$m_{AB} = \dfrac{4-(-2)}{8-2} = \dfrac{6}{6} = 1$

$m_{DC} = \dfrac{7-1}{5-(-1)} = \dfrac{6}{6} = 1$

$\because\ m_{AB} = m_{DC}$

$\therefore\ AB // DC$

$m_{AD} = \dfrac{-2-1}{2-(-1)} = \dfrac{-3}{3} = -1$

$m_{BC} = \dfrac{7-4}{5-8} = \dfrac{3}{-3} = -1$

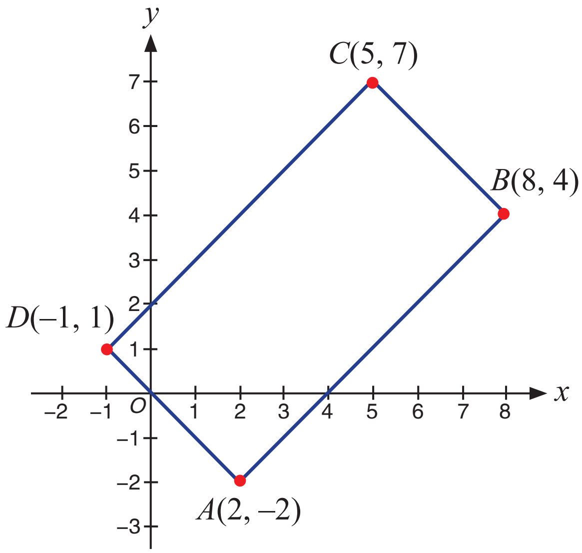
$\because\ m_{AD} = m_{BC}$

$\therefore\ AD // BC$

又，$m_{AD} \cdot m_{DC} = -1$。所以，$AD \perp DC$。

$\because\ AB // DC$，$AD // BC$ 及 $AD \perp DC$

$\therefore\ A$，B，C，D 是长方形的四个顶点。



随堂练习 1.4c

1. 证明过点 $A(0, 2)$ 及 $B(-3, 0)$ 的连线与过点 $C(4, 0)$及 $D(0, 6)$ 的连线互相垂直。
2. 证明 $A(2, 1)$，$B(3, -2)$，$C(-4, -1)$ 是一直角三角形的三个顶点。

习题 1.4

1. 证明三点 $A(3, 2)$，$B\left(-3, \frac{7}{2}\right)$ 及 $C(-5, 4)$ 在同一直线上。

2. 如果三点 $A(t, 2)$，$B(7, 6)$ 及 $C(-3, 3t + 4)$ 在同一条直线上，求 t 的值。

3. 证明以 $A(3, 2)$，$B(1, 13)$，$C(7, 5)$ 为顶点的三角形是一个直角三角形。

4. 证明 $A(2, 3)$，$B(4, -1)$，$C(0, -5)$ 及 $D(-2, -1)$ 是一平行四边形的四个顶点。

5. 证明 $A(-3, -3)$，$B(5, 1)$，$C(3, 5)$ 及 $D(-5, 1)$ 四点是一长方形的四个顶点。

6. 若 $A(a, 4)$，$B(6, a)$ 两点的连线与 $C(2, a + 3)$，$D(a + 3, 2)$ 两点的连线互相垂直，求 a 的值。

7. 已知一直角三角形 ABC 中的顶点 A 在 x 轴上，且 $\angle BAC$ 是直角，点 B 及 C 的坐标分别是$(5, -3)$ 及 $(4, 4)$。求点 A 的坐标。

1.5 直线方程式

我们知道二元一次方程式的图像是直线。给定一条直线要如何求得它的方程式呢?

如图 1–10 所示，设直线 l 的斜率是 m，且过点 $A(x_1, y_1)$，点 $P(x, y)$ 是直线 l 上任意一点。当 P 不等于 A 时，PA 的斜率就是直线 l 的斜率。根据经过两点的直线的斜率公式，得

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

上述公式可化简成以下形式

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

以上方程式可根据直线上的一点及其斜率求得，称为直线方程式的点斜式。

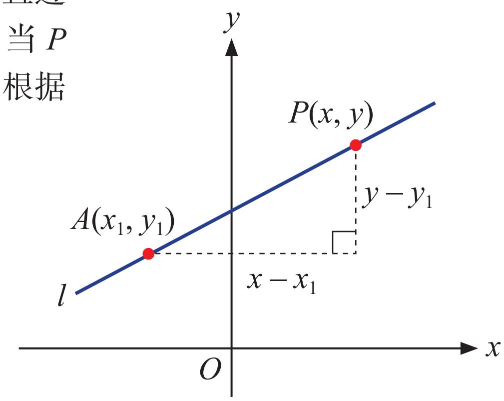


图 1-10

董總
DONG ZONG

董總
DONG ZONG