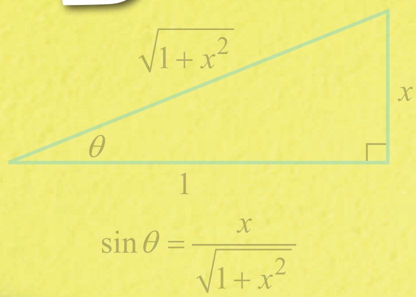
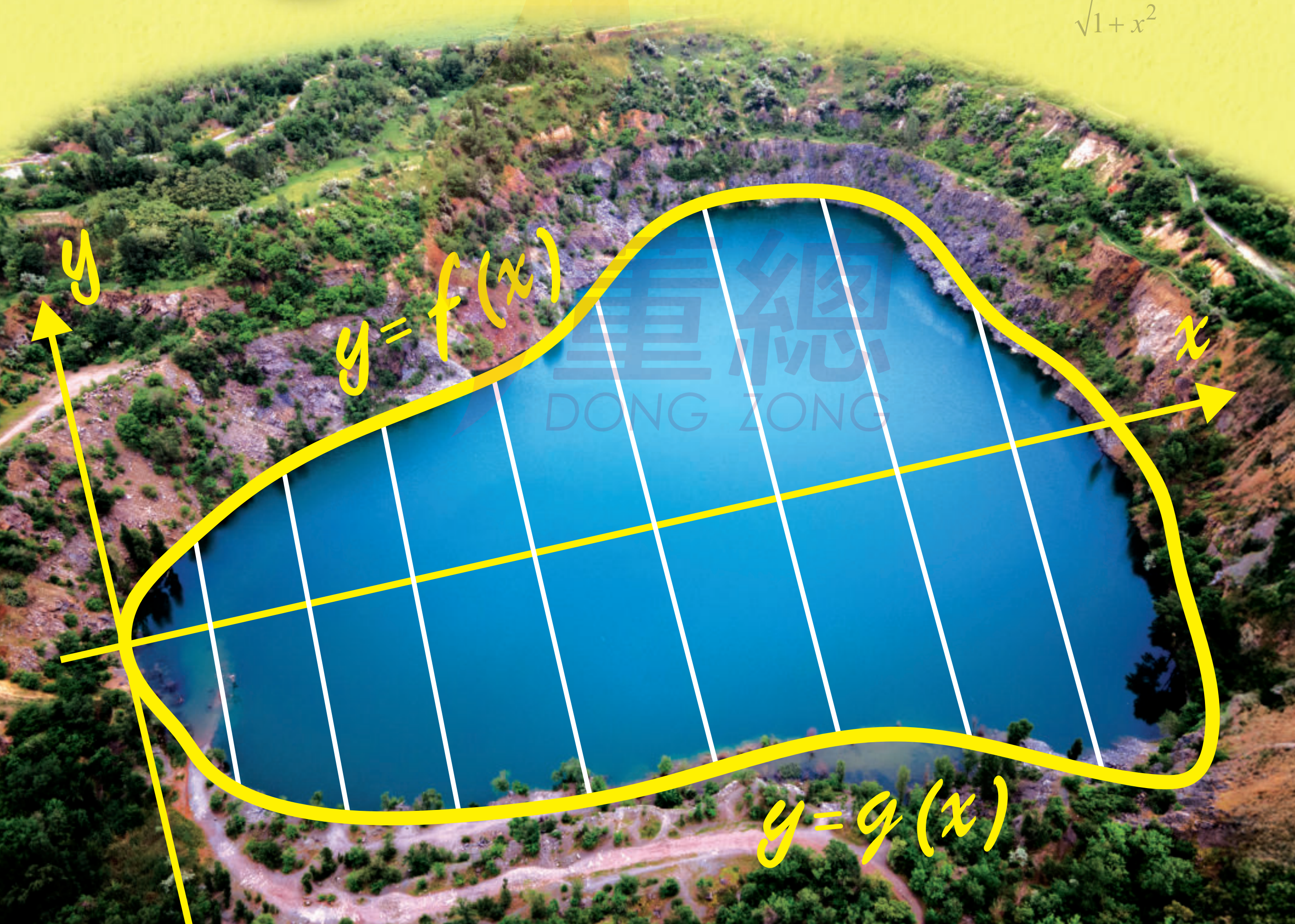
马来西亚华文独中教科书

高级数学

高三
上册





董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

独中教育
核心素养图

积极态度与正面价值
Proactive Attitude and Positive Values
领导能力与团队合作
Leadership and Teamwork
语言素养与沟通表达
Languages and Communication
品德素质与人文关怀
Ethics and Humanitarianism
国家认同与多元文化
Patriotism and Multicultural Awareness
全球视野与永续发展
Global Perspectives and Sustainable Development
身心平衡与美感素养
Physical-Mental Wellbeing and Aesthetic Appreciation
善用知识与运用科技
Knowledge and Technology Applications
创意思维与解决问题
Innovative Thinking and Problem Solving
自主学习
Self-Directed Learning
沟通协作
Communication and Collaboration
社会参与
Social Participation
终身学习者
Lifelong Learner

《高级数学》高三上册

美术编辑：曹薇华
排　　版：梁翠芳

© 郑重声明，此书版权归出版单位所有，未经允许，书上所有内容不得通过任何形式进行复制、转发、储存于检索系统，或翻译成其它语言的活动。

© Dong Zong
Hak cipta terpelihara. Mana-mana bahan atau bahagian dalam buku ini tidak dibenarkan diterbitkan semula, disimpan dalam cara yang boleh dipergunakan lagi, atau ditukar kepada apa-apa bentuk atau apa-apa cara, baik dengan elektronik, mekanikal, fotokopi, rakaman, pengalihan bahasa dan sebagainya tanpa mendapat kebenaran secara menulis daripada pihak penerbit terlebih dahulu.

© Dong Zong
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, translated in any other languages, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School（MICSS）Working Committee

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
United Mission Press Sdn. Bhd.

版次：
2025 年 9 月第 1 版

印次：
2025 年 9 月第 1 次印刷

编审团队

学科顾问：刘建华　郑章华

编审委员：纪露结　陈玉丽　陈美溢　陈盈颖　苏民胜　李鸿聪
张锦发　林艾嘉　林汶良　姚和兴　萧子良　黄书丰

编写人员：刘建华　纪露结　陈盈颖　张锦发　林方馨

责任编辑：林方馨

（按姓氏笔画排列）

鸣谢

本书承蒙国内学者、独中数学科教师等提供建设性意见，并协助编写及审稿，谨此统致谢忱。

董教总华文独中工委会统一课程委员会　启

2025 年 8月

编辑说明

1. 这套《高级数学》是根据董教总全国华文独中工委会统一课程委员会所拟定的“高级数学课程标准”编写而成。在拟定课程标准的过程中，除采用部分旧版《高级数学》的课程内容，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KSSM）、SPM、STPM 及各国的课程标准和教材。

2. 这套《高级数学》是为全国华文独中的高中理科班学生编写的，全套教材共分六册，分三年使用。高一及高二的每册内容依据每周7节、每节 40 分钟的教学时间编写；而高三每册依据每周 5 节、每节 40 分钟编写。各校可按个别情况安排授课时数。

3. 这套教材共有 35 章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学与微积分等。

4. 本书是高三上册，提供高中三年级使用。

5. 本书设有“学习目标”、“想一想”、“数学橱窗”、“温故知新”、“补充资料”、“注意”及“探索活动”栏目。设置以上栏目，是为了方便学生掌握学习重点，启发学生思考，并增进学习效果。

6. 本书每节都设有随堂练习及习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。

7. 本书附有中英名词对照，供学习参考。习题的答案也都附在书末。

8. 本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

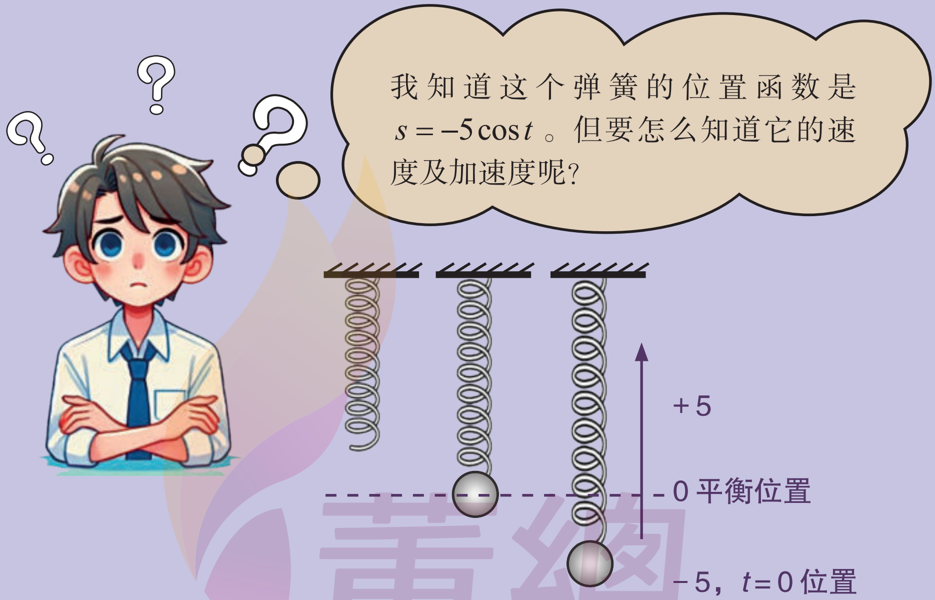
董教总华文独中工委会统一课程委员会
《高级数学》编审小组
2025 年 8 月

目录

董總 DONG ZONG

董總 DONG ZONG

虽然我们已经学到一些极限和微分的知识，但这些知识还不足以解决现实生活中的复杂关系。接下来，我们先探讨极限趋近于无穷的情况，再进一步扩展导数的应用范围，涵盖隐函数、三角函数、指数函数及对数函数。



此外，要描绘更准确的函数图像，我们需要更多了解函数的性质。因此，本章将结合学过的极值和递增递减性质，进一步讨论函数图像的凹凸性等性质。

董総 DONG ZONG

28 微分及其应用（二）

学习目标

- 掌握隐函数的微分法
- 能求三角函数、对数函数与指数的导数
- 掌握对数微分法
- 应用洛必达法则求函数的极限
- 判断函数的凸向，求拐点及曲线的渐近线
- 描绘函数的图像

董總
DONG ZONG

28.1 隐函数的微分法

考虑方程式 $x^2+y^2=1$，我们可改写成 $y=\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{1-x^2}$。对于这种隐藏多个函数的方程式，我们都称 y 为 x 的隐函数 (implicit function)。然而，不是所有隐函数可容易改写成 $y=f(x)$ 的形式，例如 $y^2+2xy-3=0$。那么，要如何求得此隐函数的导数？

例题 1

已知 $y^2-5x=0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。据此，求曲线在 $x=1$ 上的斜率。

解 把 $y^2-5x=0$ 写成 y 对 x 的函数 $y=\pm\sqrt{5x}$，

当 $y=\sqrt{5x}$ 时，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(5x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 5=\frac{5}{2\sqrt{5x}}=\frac{5}{2y}。$$

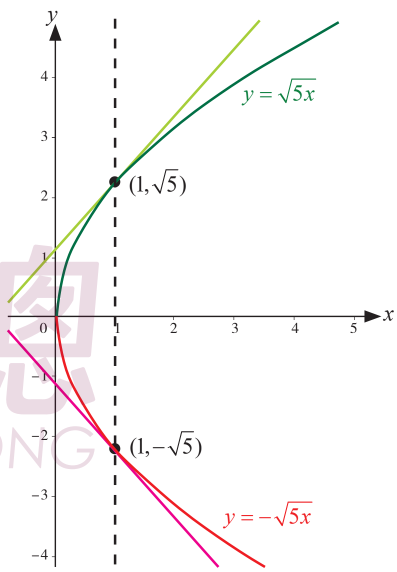
当 $y=-\sqrt{5x}$ 时，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}(5x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 5=-\frac{5}{2\sqrt{5x}}=\frac{5}{2y}。$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{5}{2y}$$

在点 $(1,\sqrt{5})$ 上，斜率为 $\dfrac{5}{2(\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

在点 $(1,-\sqrt{5})$ 上，斜率为 $\dfrac{5}{2(-\sqrt{5})}=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。



董總 DONG ZONG

实际上，欲求隐函数的导数，可同时在方程式的两边对 x 微分及应用链导法，以得出一个联系 x、y 及 $\frac{dy}{dx}$ 的方程式，然后求出 $\frac{dy}{dx}$。比如例题 1，左右两边对 x 求导亦可得到相同的结果：

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right)-\frac{d}{dx}(5x)=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}-5=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{2y}$$

例题 2

已知 $x^3+2xy-y^2=5$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解 两边对 x 求导，得

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right)+\frac{d}{dx}(2xy)-\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=\frac{d}{dx}(5)$$

$$3x^2+2x\frac{dy}{dx}+2y-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(2x-2y)\frac{dy}{dx}=-3x^2-2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2-2y}{2x-2y}$$

董總 DONG ZONG

例题 3

已知 $(x-2y)^2=3x^2y+5$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解 两边对 x 求导，得

$$2(x-2y)\left(1-2\frac{dy}{dx}\right)=3x^2\frac{dy}{dx}+6xy$$

$$2(x-2y)-4(x-2y)\frac{dy}{dx}=3x^2\frac{dy}{dx}+6xy$$

$$(8y-4x)\frac{dy}{dx}-3x^2\frac{dy}{dx}=6xy+4y-2x$$

$$(8y-4x-3x^2)\frac{dy}{dx}=6xy+4y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6xy+4y-2x}{8y-4x-3x^2}$$

随堂练习 28.1

已知下列方程式，求 $\dfrac{dy}{dx}$：

1. $x^2+y^2-6x+8y-9=0$

2. $x^3+2x^2y^3+y^4=1$

3. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=5$（$a$、$b$ 是常数）

4. $x^2-2xy+y^2=9$

董總 DONG ZONG

习题 28.1

已知下列方程式，求 $\dfrac{dy}{dx}$：

1. $4x^3+2xy^2-xy=0$

2. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{7}$

3. $3x^2-6xy+3y^2=25$

4. $x^3+y^3=2xy+3$

5. $y^2(x+1)=3x^2$

6. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=1$

7. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2x$

8. $\sqrt{y}=\dfrac{x}{x\sqrt{y}+y}$

28.2 三角函数的微分法

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 的值

探索活动 1

1. 填充下表：

x（弧度）	$\sin x$	$\dfrac{\sin x}{x}$
1		
0.5		
0.25		
0.1		
0.01		
0.001		
⋮	⋮	⋮

2. 观察当 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的值的变化趋势，说说你的发现。

3. 观察当 $x\to 0^-$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的值的变化趋势，说说你的发现。

从探索活动 1 可以看出，当 x 趋近于零时，函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的值趋近于 1，由此可推测

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

董總 DONG ZONG

接下来，我们证明这个结论。

如图 28–1，在单位圆中，以 OA 为始边的圆心角 x（以弧度为单位），角的终边与圆相交于 P，$MP \perp OA$，AN 是过 A 点的切线，AN 与 OP 的延长线交于 N；可知，

$$MP = \sin x$$

$$PA\text{的弧长} = r\theta = x \quad (r = 1,\ \theta = x)$$

$$AN = \tan x$$

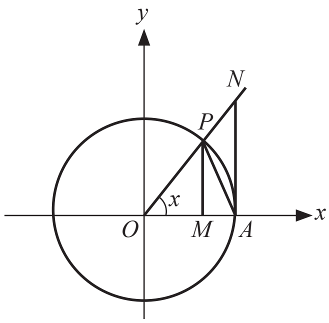


图28–1

且 ΔOAP 的面积 $<$ 扇形 OAP 的面积 $< \Delta OAN$ 的面积

$$\therefore\ \frac{1}{2}(1)^2 \sin x < \frac{1}{2}(1)^2 x < \frac{1}{2}\tan x$$

$$\sin x < x < \tan x$$

当 x 为不大的正角时，$\sin x > 0$，以 $\sin x$ 除上式，

得 $$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\because\ \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\ \text{在1与}\lim_{x\to 0}\cos x\ \text{之间，}$$

即在两个 1 之间，当然只能等于 1。

由此，也可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}} = 1$$

例题 4

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{3x}$。

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{3x\cos 5x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}\cdot\frac{5}{3}\right)$$
$$=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}$$
$$=\frac{5}{3}\times 1\times 1$$
$$=\frac{5}{3}$$

例题 5

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$。

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{6}{2}\right)$$
$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}$$
$$=3\times 1\times 1$$
$$=3$$

例题 6

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$。

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{-\sin x}{\cos x+1}\right)$$
$$=1\times\frac{0}{2}$$
$$=0$$

董總 DONG ZONG

随堂练习 28.2a

求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 5x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 9x}{\sin 5x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x\sin 3x}{x^2}$

习题 28.2a

求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 3x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin 2x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{5}{2}x}{2x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 7x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cot x)$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{2x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x\sin 5x}{1-\cos 4x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x^2}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{2\tan^2 9x}$

董總 DONG ZONG

三角函数的导数

现在，我们推导三角函数的导数。

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x}$$

证明：设 $y=\sin x$

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$$

$$=\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\sin x(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}+\frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}+\frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}\right)$$

$$=\sin x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\cos x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$$

$$=0+\cos x\cdot 1$$

$$=\cos x$$

温故知新

高一课本的11.2小节提到：

$\sin(\alpha+\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x}$$

证明：$\because \cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\cos x)=\frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$$

$$=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)(-1)$$

$$=-\sin x$$

董總 DONG ZONG

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x}$$

证明： $\because\ \tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \frac{d}{dx}(\tan x)&=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\\
&=\frac{\cos x\dfrac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}\\
&=\frac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&=\frac{1}{\cos^2 x}\\
&=\sec^2 x
\end{aligned}$$

三角函数 $\sec x$ 、 $\cot x$ 、 $\operatorname{cosec} x$ 亦可用同样的方式求导，因此我们可以得到以下结果：

$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)=-\operatorname{cosec} x\cot x$
$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$	$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$
$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x$

董總
DONG ZONG

例题 7

求 $y=3\sin x-7\cos x$ 的导数。

解 $$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=3\cos x-7(-\sin x)\\&=3\cos x+7\sin x\end{aligned}$$

例题 8

求下列各函数的导数：

(a) $y=\sin 5x$

(b) $f(x)=\cos^3 7x$

解 (a) 由链导法，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\sin 5x)$$
$$=\cos 5x\frac{d}{dx}(5x)$$
$$=5\cos 5x$$

(b) 由链导法，得

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(\cos^3 7x)$$
$$=3\cos^2 7x\frac{d}{dx}(\cos 7x)$$
$$=3(\cos^2 7x)(-7\sin 7x)$$
$$=-21\sin 7x\cos^2 7x$$

随堂练习 28.2b

求下列各函数的导数：

1. $y=\sin^2 2x-\cos^2 2x$

2. $y=\dfrac{5}{\tan^3 4x}$

3. $f(x)=\sec(2x^2)$

4. $f(x)=\dfrac{1}{\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)}$

董總
DONG ZONG

例题 9

求函数 $y=2x\sec x$ 的导数。

解 $y=2x\sec x$

$$\frac{dy}{dx}=2x(\sec x\tan x)+2\sec x$$
$$=2\sec x(x\tan x+1)$$

例题 10

求 $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ 对 x 的微分。

解
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{(1+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{1}{1+\cos x}$$

想一想 1 例题10是否有其他解法?

例题 11

求函数 $y=\dfrac{2}{5\tan^3 3x}$ 的导数。

解
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5\tan^3 3x}\right)$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5}\cot^3 3x\right)$$
$$=\frac{2}{5}\left(3\cot^2 3x\right)(3)\left(-\operatorname{cosec}^2 3x\right)$$
$$=-\frac{18}{5}\cot^2 3x\operatorname{cosec}^2 3x$$

董總 DONG ZONG

例题 12

已知 $y = x\cos x$，证明 $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x} - \tan x$。

证

$$\frac{dy}{dx} = x(-\sin x) + \cos x$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - x\sin x}{x\cos x}$$

$$= \frac{\cos x}{x\cos x} - \frac{x\sin x}{x\cos x}$$

$$= \frac{1}{x} - \tan x$$

例题 13

求函数 $f(x) = \sin x°$ 的导数。

解 由于三角函数的求导公式只在弧度制下成立，所以我们需要把角度换成弧度。

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sin\left(x° \times \frac{\pi}{180°}\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sin\frac{\pi}{180}x\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{180}x\right)\frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{\pi}{180}\cos x°$$

董總 DONG ZONG

随堂练习 28.2c

求下列各函数对 x 的微分：

1. $y = \sec 2x \tan 3x$
2. $y = (2x-1)\cos^2 x$
3. $y = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$
4. $y = \dfrac{\sin x}{x}$

习题 28.2

求下列各函数的导数（1 至 12）：

1. $y=\sin 3x-\cos 3x$

2. $y=\tan^3 2x^2$

3. $y=\cos^4(1-2x)$

4. $y=\sec 3x+\operatorname{cosec} 5x$

5. $y=\tan 4x-\cot 5x$

6. $y=5x\sec 3x$

7. $y=\sqrt{\cos 2x}$

8. $y=\sin^2\sqrt{1+x^2}$

9. $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$

10. $y=\dfrac{3\sin 2x}{\cos x}$

11. $y=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

12. $y=x\tan^2(3x-2)$

13. 已知 $y=\dfrac{x}{2+\cos x}$，求 $x=0$，$\dfrac{\pi}{2}$，π 时的导数值。

14. 若 $y=\sec x+\tan x$，证明 $\dfrac{dy}{dx}=y\sec x$。

15. 已知 $y=\dfrac{\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$，证明 $\dfrac{dy}{dx}=2\operatorname{cosec}^2\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$。

16. 若 $r=\sin 3t-2\cos t$，求当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时 $\dfrac{d^2r}{dt^2}$ 之值。

17. 已知 $y=x\sin x$，证明 $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}+\cot x$。

18. 求曲线 $y=\tan x-2\sec^2 x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线斜率。

董總 DONG ZONG

28.3 对数函数的微分法

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的值

探索活动 2

1. 填充下表：

x	$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的值
1	
10	
100	
1000	
10000	
100000	
⋮	⋮

2. 观察当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势，说说你的发现。

从探索活动 2 可知，当 x 趋向无穷大时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 趋近一个常数，这是一个接近 2.71828 的无理数，以 e 表示，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

同理，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$。以 e 为底的对数就是自然对数 $\ln x$，这已在高一的第 12 章提过。

同时，若设 $y=\dfrac{1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{y}$，

当 $x\to\infty$ 时，$y\to 0^+$；

当 $x\to-\infty$ 时，$y\to 0^-$。

于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$$

数学橱窗 1

数学家欧拉

https://w.wiki/CwLN

例题 14

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2x}$。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{-2}$

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{-2}$

$=e^{-2}$

董總 DONG ZONG

例题 15

求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^4$

$=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^4$

$=e^4$

例题 16

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x}\right)^{x}$。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(-\dfrac{6}{x}\right)\right)^{\left(-\frac{x}{6}\right)(-6)}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}\right)^{-\frac{x}{6}}\right]^{-6}$$

$$=e^{-6}$$

例题 17

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x}$。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-x)}\right)^{-x}$$

$$=e$$

董總 DONG ZONG

随堂练习 28.3a

求下列各极限：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-3x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$

习题 28.3a

求下列各极限：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2-x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1-\frac{2}{x}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{-3x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{3+x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{-\frac{3}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}$

对数函数的导数

自然对数的求导公式

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}}$$

证明：设 $y=\ln x$

$$\begin{aligned}
y+\Delta y &= \ln(x+\Delta x)\\
\Delta y &= \ln(x+\Delta x)-y\\
&= \ln(x+\Delta x)-\ln x\\
&= \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\\&=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\\&=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\\&=\frac{1}{x}\ln\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\\&=\frac{1}{x}\ln e\\&=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

当对数内部包含绝对值时，我们需特别处理，例如 $y=\ln|x|$，我们可视为

当 $x>0$ 时，$y=\ln x$　　　　当 $x<0$ 时，$y=\ln(-x)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\qquad\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$$

董總 DONG ZONG

由此可见，对数内包含绝对值与否，其导数结果都是相同的。

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)=\frac{1}{x}$$

例题 18

求 $y=\ln 3x^2$ 的导数。

解 $y=\ln 3x^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)$$
$$=\frac{6x}{3x^2}$$
$$=\frac{2}{x}$$

例题 19

求 $y=\ln\left(4x^2+8x-1\right)$ 的导数。

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4x^2+8x-1}\cdot\frac{d}{dx}\left(4x^2+8x-1\right)$$
$$=\frac{8x+8}{4x^2+8x-1}$$

一般对数函数的导数

一般地，求对数函数的导数，可先将所给的对数变换成自然对数，或应用对数函数的性质化简后，再求导数。

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right)=\frac{1}{x\ln a}$$

证明：设 $y=\log_a x$

$$=\frac{\ln x}{\ln a}$$
$$=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x$$

董總
DONG ZONG

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(\ln x)$$
$$=\frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{x\ln a}$$

例题 20

求 $y=\log_2(4x-5)$ 的导数。

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{4}{4x-5}$$
$$=\frac{4}{(4x-5)\ln 2}$$

例题 21

求 $y=\log_5\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ 的导数。

解 $$y=\log_5\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$
$$=\log_5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}{\ln 5}\right)$$
$$=\frac{1}{2\ln 5}\left[\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\ln 5}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

董總 DONG ZONG

例题 22

求 $y=x^2\log_3 x$ 的导数。

解 $$\frac{dy}{dx}=x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)+\log_3 x\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$
$$=x^2\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{x}\right)+(2x)\log_3 x$$
$$=\frac{x}{\ln 3}+2x\log_3 x$$

随堂练习 28.3b

求下列各函数的导数：

1. $y=\ln\left(x^2-2x+1\right)$
2. $y=x\ln x$
3. $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
4. $y=\log_2\sqrt{1+x^2}$

习题 28.3b

求下列各函数的导数：

1. $y=\ln\left(2x^2-8x+6\right)$
2. $y=\log_2\left(x^2-4x+1\right)$
3. $y=\log_5 3x$
4. $y=\log_a\left(2ax^2-4ax\right)$
5. $y=\log_a(\ln x)$
6. $y=\ln\cos^2 x$
7. $y=3x^2\ln 5x$
8. $y=\log_5\left(2x^2-3\right)$
9. $y=\log_8\sqrt{x^2-2}$
10. $y=\log_b\sin 5x$
11. $y=\log 5x+\ln\tan x$
12. $y=\ln^2(\sec x)$

董總 DONG ZONG

董總
DONG ZONG

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

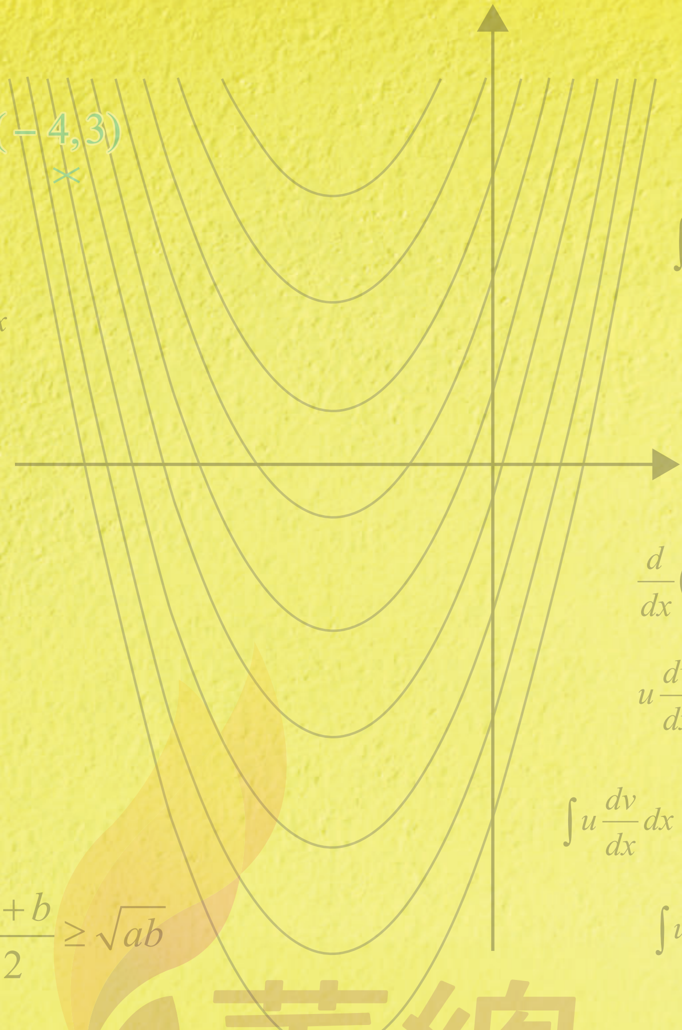
$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)=-\operatorname{cosec} x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x$$



$$I'(x)=I(x)P(x)$$

$$\frac{I'(x)}{I(x)}=P(x)$$

$$\int\frac{I'(x)}{I(x)}dx=\int P(x)dx$$

$$\ln\left|I(x)\right|=\int P(x)dx$$

$$\left|I(x)\right|=e^{\int P(x)dx}$$

$$a>0,\ \ b>0$$

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$$

$$a=b\quad\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=0$$

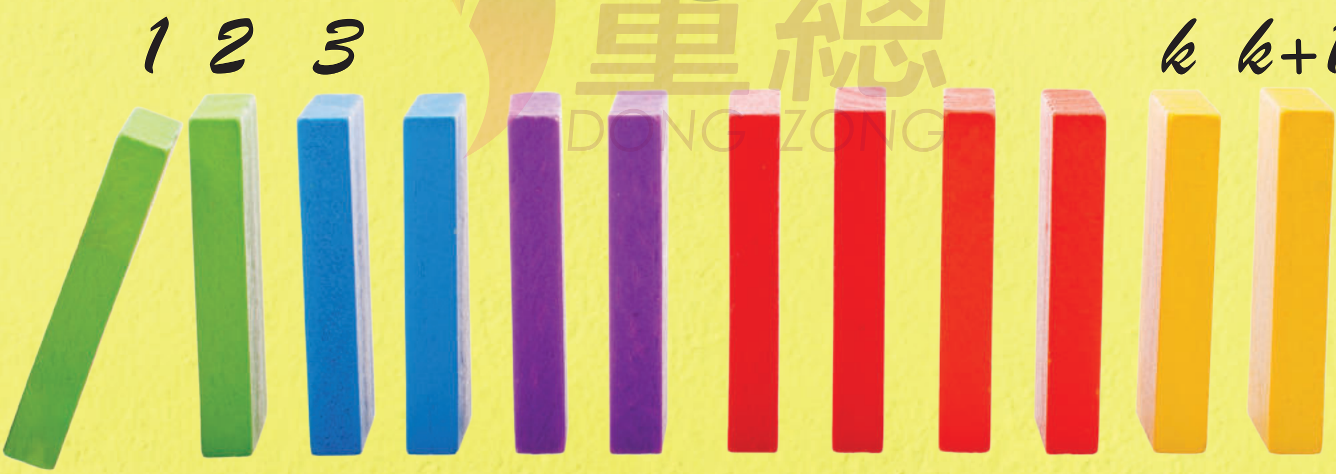
$$a\neq b\quad\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2>0\qquad\therefore\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

$$\frac{d}{dx}(uv)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$$

$$u\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}(uv)-v\frac{du}{dx}$$

$$\int u\frac{dv}{dx}dx=\int\frac{d}{dx}(uv)dx-\int v\frac{du}{dx}dx$$

$$\int u\ dv=uv-\int v\ du$$



$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},n=0,1,2,\cdots$$

ISBN 978-983-169-623-1