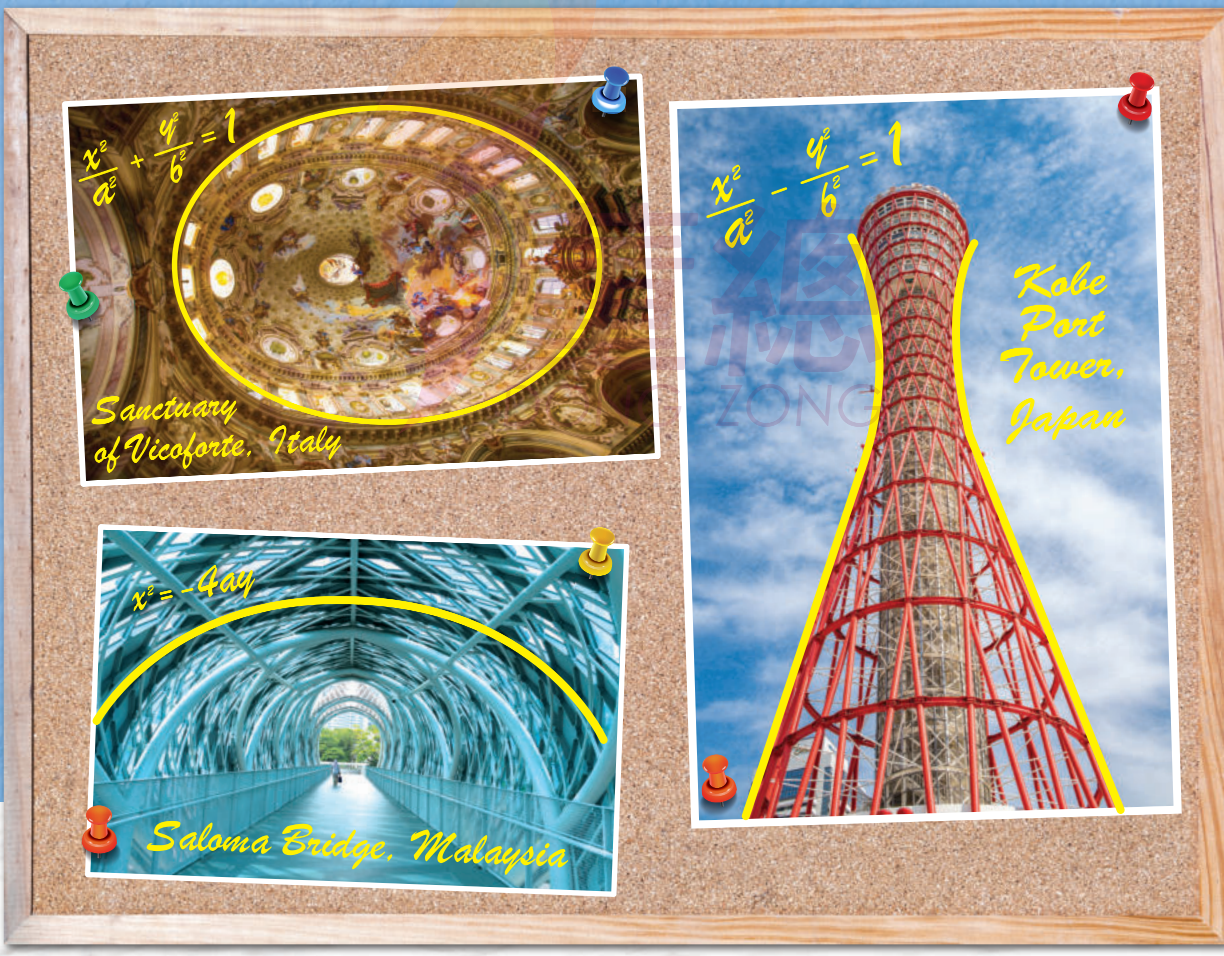
马来西亚华文独中教科书

高级数学

高三 下册



董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

独中教育
核心素养图


积极态度与正面价值
Proactive Attitude and Positive Values
领导能力与团队合作
Leadership and Teamwork
语言素养与沟通表达
Languages and Communication
品德素质与人文关怀
Ethics and Humanitarianism
国家认同与多元文化
Patriotism and Multicultural Awareness
全球视野与永续发展
Global Perspectives and Sustainable Development
身心平衡与美感素养
Physical-Mental Wellbeing and Aesthetic Appreciation
善用知识与运用科技
Knowledge and Technology Applications
创意思维与解决问题
Innovative Thinking and Problem Solving
自主学习
Self-Directed Learning
沟通协作
Communication and Collaboration
社会参与
Social Participation
终身学习者
Lifelong Learner
董総
DONG ZONG

《高级数学》高三下册

美术编辑：曹薇华
排　　版：梁翠芳

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School（MICSS）Working Committee

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Vinlin Press Sdn. Bhd.

版次：
2025 年 9 月第 1 版

印次：
2025 年 9 月第 1 次印刷

编审团队

学科顾问	：	刘建华	郑章华				
编审委员	：	纪露结	陈玉丽	陈美溢	陈盈颖	苏民胜	李鸿聪
		张锦发	林艾嘉	林汶良	姚和兴	萧子良	黄书丰
编写人员	：	刘建华	陈美溢	李鸿聪	萧子良	林方馨	
责任编辑	：	林方馨					

（按姓氏笔画排列）

鸣谢

本书承蒙国内学者、独中数学科教师等提供建设性意见，并协助编写及审稿，谨此统致谢忱。

董教总华文独中工委会统一课程委员会　启

2025 年 9 月

编辑说明

1. 这套《高级数学》是根据董教总全国华文独中工委会统一课程委员会所拟定的“高级数学课程标准”编写而成。在拟定课程标准的过程中，除采用部分旧版《高级数学》的课程内容，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要（KSSM）、SPM、STPM 及各国的课程标准和教材。

2. 这套《高级数学》是为全国华文独中的高中理科班学生编写的，全套教材共分六册，分三年使用。高一及高二的每册内容依据每周7节、每节 40 分钟的教学时间编写；而高三每册依据每周 5 节、每节 40 分钟编写。各校可按个别情况安排授课时数。

3. 这套教材共有 35 章，内容包括代数、三角学、解析几何、统计学与微积分等。

4. 本书是高三下册，提供高中三年级使用。

5. 本书设有“学习目标”、“想一想”、“数学橱窗”、“补充资料”、“注意”及“探索活动”栏目。设置以上栏目，是为了方便学生掌握学习重点，启发学生思考，并增进学习效果。

6. 本书每节都设有随堂练习及习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。

7. 本书附有中英名词对照，供学习参考。习题的答案也都附在书末。

8. 本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总华文独中工委会统一课程委员会
《高级数学》编审小组
2025 年 9 月

目录

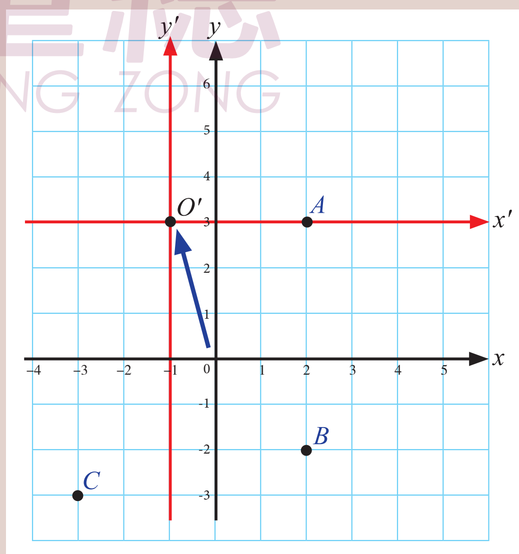
在资讯时代，我们时常需要处理各种各样的图像以及视频资料。从原理上看，照片的像素恰似坐标平面上一个个离散的点，它们凭借在不同坐标位置显示各异的颜色，进而共同呈现出照片丰富多样的色彩效果。

当我们对照片进行处理时，常用到的一些操作，像放大缩小、旋转以及反射等，在数学领域这些操作被称作线性变换。针对这类变换，我们可以借助矩阵这一有力工具，较为便捷地确定图像经过变换后相应像素点所处的新位置。

除了做图像处理，坐标的变换可以帮助我们用一个更恰当的参照系使得原本比较复杂的方程式在变换后变得更加容易处理。

在本章，我们探讨一个方程式或者一个点在经过坐标轴的平移或旋转后所对应的改变。

右图显示同一个平面的两个坐标系 xOy 及 $x'O'y'$，其中 $x'O'y'$ 相当于把原点平移到 O' 所得到。已知相对于 xOy 而言，O' 的坐标是 $(-1,3)$，另有三个点 $A(2,3)$, $B(2,-2)$ 及 $C(-3,-3)$。根据右图，你是否能找到 O', A, B 及 C 相对于红色坐标系 $x'O'y'$ 的坐标？



32 坐标变换

学习目标

- 理解坐标轴的平移及旋转的几何意义
- 应用坐标轴的平移公式及旋转公式

32.1 坐标轴的平移（移轴）

在平移坐标轴时，坐标轴的方向和长度单位都不变，只改变原点的位置，这种变换简称移轴(translation of axes)。在本章，我们一律以 xOy 代表原坐标系，以 $x'O'y'$ 代表变换后的坐标系。接下来，我们探讨 xOy 与 $x'O'y'$ 两个坐标系之间的关系。

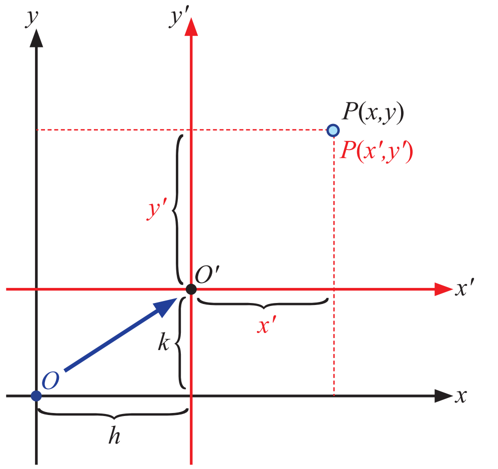


图32–1

设 O' 在坐标系 xOy 的坐标为 (h,k)，原坐标系的点 (x,y) 在新坐标系的坐标为 (x',y')。从图 32–1 我们可以看出

$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \end{cases}$$

以上的公式叫做移轴公式。当 $(x',y')=(0,0)$ 时，我们得到 O' 在原坐标系的坐标为 (h,k)。

例题 1

平移坐标轴，把原点移到 $O'(3,-4)$，求下列各点的新坐标：

$O(0,0)$、$A(3,-4)$、$B(5,2)$、$C(3,-2)$

解 把已知各点的原坐标代入

$$\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 4 \end{cases}$$

得 $O(-3,4)$、$A(0,0)$、$B(2,6)$、$C(0,2)$。

注意

这里的点 O、A、B、C 并没有动，只是坐标改变了。

随堂练习 32.1a

验证你在引言中的答案满足移轴公式。

观察图 32-2 中的圆，其方程式为 $(x-3)^2+(y-2)^2=5^2$。在坐标系 xOy 中，它的圆心在 $(3,2)$。如果我们建立另一个以 $(3,2)$ 为原点的坐标系 $x'O'y'$，那么同样一个圆在 $x'O'y'$ 的方程式就会是 $x'^2+y'^2=5^2$。我们看出，适当地将坐标轴平移，可以简化一些曲线的方程式，以便于研究曲线的性质。

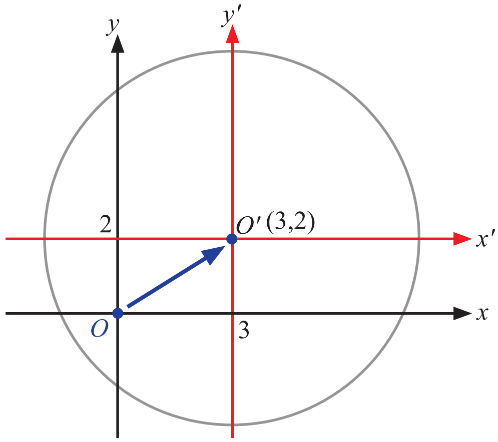


图32–2

例题 2

平移坐标轴，化简方程式 $x^2-y^2+8x-14y-133=0$。

解 将方程式配方，

$$x^2+8x-(y^2+14y)=133$$

$$(x+4)^2-(y+7)^2=133+16-49$$

$$(x+4)^2-(y+7)^2=100$$

将原点移到 $(-4,-7)$，令 $x'=x+4$，$y'=y+7$，得 $(x')^2-(y')^2=100$。

随堂练习 32.1b

利用平移变换，化简 $x^2-y^2-6x+12y-4=0$。

习题 32.1

1. 平移坐标轴，把原点移到 $O'(4,5)$，求下列各点的新坐标：
   $A(3,-6)$、$B(7,0)$、$C(-4,5)$、$D(0,-8)$。

2. 平移坐标轴，原点移到 $O'(1,-2)$，A、B、C、D各点的新坐标分别是 $(-1,1)$、$(0,-2)$、$(3,2)$、$(2,0)$。求它们的原坐标。

3. 当坐标平移后，点 $(-1,2)$ 的新坐标为 $(4,-3)$，求新原点的原坐标。

4. 当坐标平移后，点 $(3,-3)$ 及 $(-2,2)$ 的新坐标分别为 $(2,-1)$ 及 (a,b)。求 a 及 b。

5. 当坐标平移后，点 $(-4,2)$ 及 $(6,-2)$ 的新坐标分别为 $(6,\alpha)$ 及 $(\beta,4)$。求 α 及 β。

6. 平移坐标轴，把原点移到 $O'(2,-3)$。求 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 在新坐标系的方程，并辨识其图像。

7. 利用平移变换，化简
   (a) $x^2+y^2-2x+6y-6=0$
   (b) $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$

8. 经过坐标轴平移后，点 A 的坐标由 $(2,-1)$ 变为 $(-2,1)$。求坐标原点在新坐标系中的坐标。

32.2 坐标系的旋转（转轴）

如果坐标轴的原点和长度单位不变，只是将坐标轴按同一方向绕原点旋转同一个角度，这种坐标系的变换叫做坐标轴的旋转，简称转轴 (rotation of axes)。

设坐标轴旋转角为 θ。平面中点 P 在坐标系 xOy 与 $x'Oy'$ 的坐标分别为 (x,y) 及 (x',y')。如图32–3所示，作 PS，PT 分别垂直于 x 轴与 x' 轴。连接 OP，令 $\angle POT=\alpha$，则

$$x' = OP \cdot \cos\alpha$$
$$y' = OP \cdot \sin\alpha$$

又 $x = OP\cos(\theta+\alpha)$

$= OP\left(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha\right)$

代入得 $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$

同理，$y = OP\sin(\theta+\alpha)$

$= OP\left(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha\right)$

代入得 $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

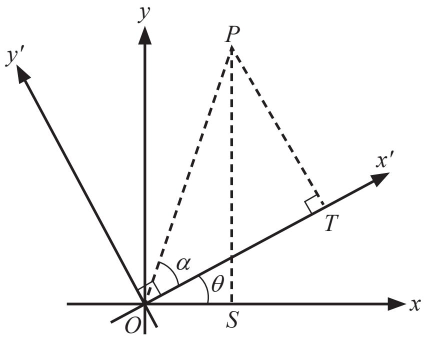


图32–3

于是我们得到转轴公式

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

例题 3

把坐标轴旋转 $\dfrac{\pi}{6}$，求点 $P\left(-1,\sqrt{3}\right)$ 在新坐标系中的坐标。

解 从转轴公式，我们得到

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

当 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$。

点 P 在新坐标系的坐标是 $(0,2)$。

想一想 1

仔细观察可以发现，旋转矩阵的逆矩阵恰好是将旋转矩阵中的 θ 换成 $-\theta$。这是什么原理？

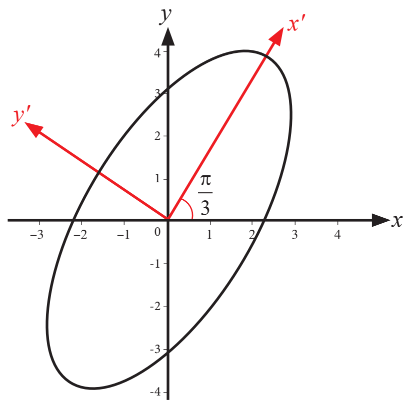
例题 4

将坐标轴旋转 $\frac{\pi}{3}$，求曲线 $2x^2-\sqrt{3}xy+y^2=10$ 在新坐标系中的方程式。

解 把 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入转轴公式，得

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\left(x'-\sqrt{3}y'\right)\\ y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x'+y'\right)\end{cases}$$



代入原方程式

$$2\left[\frac{1}{2}\left(x'-\sqrt{3}y'\right)\right]^2-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\left(x'-\sqrt{3}y'\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x'+y'\right)+\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x'+y'\right)\right]^2=10$$

化简得 $\frac{(x')^2}{20}+\frac{(y')^2}{4}=1$。

随堂练习 32.2

设坐标轴绕原点旋转 θ，求

(a) 新坐标系中两点 $(1,0)$ 及 $(0,1)$，在原坐标系的坐标；

(b) 原坐标系中两点 $(1,0)$ 及 $(0,1)$，在新坐标系的坐标。

习题 32.2

1．设旋转角 $\theta=-\frac{\pi}{4}$，求新坐标系中的两点 $A(-3,2)$ 与 $B(1,0)$ 在原坐标系的坐标。

2．设旋转角 $\theta=-\frac{\pi}{6}$，求原坐标系中的两点 $C(2,-1)$ 与 $D(0,1)$ 在新坐标系的坐标。

3. 按所给的角旋转坐标轴，变换下列方程：

(a) $x+y=0$， $\theta=\frac{\pi}{4}$

(b) $x-y=0$， $\theta=\frac{\pi}{2}$

(c) $x^2+y^2=9$， $\theta=-\frac{\pi}{3}$

(d) $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2=8$， $\theta=-\frac{\pi}{6}$

4. 如果坐标原点不动，要把坐标轴旋转多少度才能使点 $A(-2,3)$ 落在新坐标系的纵坐标轴上？

总复习题 32

1. 平移坐标轴，要把原点移到何处才能把 $A(1,0)$ 的坐标变为 $A(4,3)$？

2. 把原点平移到 $O'(3,-2)$ 后，求新坐标为 $A(-1,3)$， $B(1,1)$ 两点的原坐标。

3. 平移坐标轴，把原点移到 $O'(-4,2)$，求 $A(-8,3)$、$O(0,0)$ 的新坐标。

4. 平移坐标轴，把原点移到 O'。求下列方程式在新坐标系的表达式：

(a) $3x-4y=6$， $O'(3,0)$

(b) $x^2+6x-y+11=0$， $O'(-3,2)$

5. 平移坐标轴，化简方程式：

(a) $x^2+2y^2-4x+8y-5=0$

(b) $4x^2-9y^2+16x-54y-29=0$

6. 将坐标轴旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后，点 M 的坐标为 $(1,2)$，求点 M 的原坐标。

7. 将坐标轴旋转 $-\frac{\pi}{2}$ 后，求曲线 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 在新坐标系中的方程式。

8．将坐标轴旋转 $\dfrac{\pi}{2}$，求曲线 $y^2=2px$ 在新坐标系中的方程式。

9．把点 $A(4,3)$ 的坐标变成 $(3,4)$，坐标轴应该旋转多少度？

10．将坐标轴旋转后，点 $M(1,2+\sqrt{3})$ 的纵坐标与横坐标相等。求旋转角。

11．证明无论坐标轴旋转多大角度，方程 $x^2+y^2=r^2$ 的形式不变。

12．我们用数学归纳法证明了 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$。试描述这个等式在解析几何的意义。

董總

DONG ZONG

董總
DONG ZONG

ISBN 978-983-169-624-8

董總
DONG ZONG