高中数学

课本编撰理念与特色
课本探索活动的示范操作
备课须知

陈志丰

高中数学教材特色

想一想

想一想 3

中点公式跟统计学的哪个概念相近？

探索活动

探索活动 1

目的：探索经过两点的直线的斜率。

工具：https://www.geogebra.org/m/hrz272pq

步骤：1. 左右水平移动点 A，观察直线 AB 的斜率的大小与正负符号变化，以及倾斜程度。

2. 上下垂直移动点 B，观察直线 AB 的斜率的大小与正负符号变化，以及倾斜程度。

想象一下，你站在广阔的校园里，手持一张能精准定位的卫星地图，寻找教室、食堂或朋友聚会点。这一切，都离不开直角坐标

高中数学教材特色

想一想

想一想 3 中点公式跟统计学的哪个概念相近？

探索活动

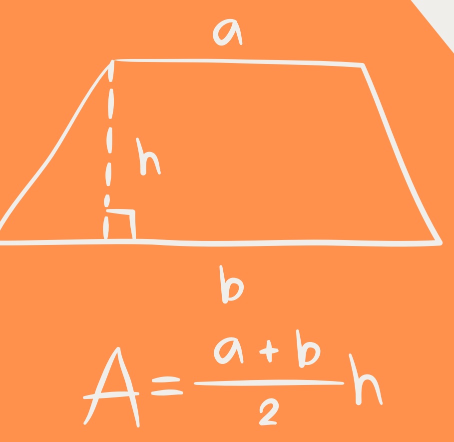
探索活动 1

目的：探索经过两点的直线的斜率。

工具：https://www.geogebra.org/m/hrz272pq

步骤：1. 左右水平移动点 A，观察直线 AB 的斜率的大小与正负符号变化，以及倾斜程度。

2. 上下垂直移动点 B，观察直线 AB 的斜率的大小与正负符号变化，以及倾斜程度。



想象一下，你站在广阔的校园里，手持一张能精准定位的卫星地图，寻找教室、食堂或朋友聚会点。这一切，都离不开直角坐标

教材特色

引言

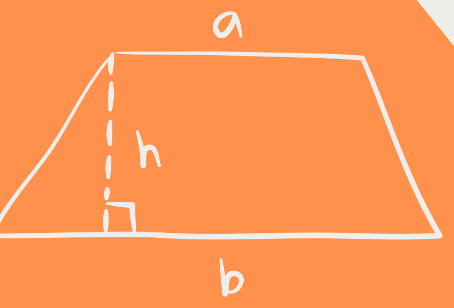
想象一下，你站在广阔的校园里，手持一张能精准定位的卫星地图，寻找教室、食堂或朋友聚会点。这一切，都离不开**直角坐标系**——将现实与数学连接的强大工具。

四百多年前，伟大的数学家笛卡尔 (René Descartes) 创立了这套语言，如今，它早已融入日常：从地图导航到工程设计，再到宇宙探测。

直角坐标系不仅是公式和定理，更像一把钥匙，帮你测量距离、定位坐标、分析直线关系，揭示数学与现实的紧密联系。

掌握这些知识，你将成为用数学解决实际问题的创造者，未来或许能设计建筑、优化交通，甚至为环保出力。

准备好了吗？让我们一起开启探索直角坐标系的奇妙旅程，发现数学世界的无限可能！



$$A=\frac{a+b}{2}h$$

各章节新增内容及其特色

- 习题精简，避免了大量重复的习题，大部分习题同学可参考例题完成
- 总复习题综合了各项知识点，可让老师用来帮助同学准备考试

Chapter 1
直角坐标系与直线

学习目标

★ 能利用距离公式计算两点之间的距离
★ 掌握分比公式，计算分点的坐标
★ 能利用三角形的顶点坐标计算三角形的面积
★ 能利用多边形的顶点坐标计算多边形的面积
★ 理解斜率的定义
★ 掌握两条直线平行与垂直的条件
★ 能根据不同的已知条件求出直线的方程式
★ 理解两条直线的交点的位置关系及掌握交点的求法
★ 掌握点到直线的距离公式，并能灵活应用

Chapter 1 直角坐标系与直线

学习目标

- ★ 能利用距离公式计算两点之间的距离
- ★ 掌握分比公式，计算分点的坐标
- ★ 能利用三角形的顶点坐标计算三角形的面积
- ★ 能利用多边形的顶点坐标计算多边形的面积
- ★ 理解斜率的定义
- ★ 掌握两条直线平行与垂直的条件
- ★ 能根据不同的已知条件求出直线的方程式
- ★ 理解两条直线的交点的位置关系及掌握交点的求法
- ★ 掌握点到直线的距离公式，并能灵活应用

分比公式推导

已知 $A(-7, 1)$，$B(3, 6)$ 两点，求内分线段 AB 成 $3:2$ 的点 P 的坐标。

解 设 P 的坐标为 (x, y)。如下图所示，过 A 的水平线分别与过 P 及 B 的铅垂线相交于 D 及 C，过 P 的水平线交 BC 于 E。于是，$\Delta APD \sim \Delta PBE$。

$$\frac{AD}{PE} = \frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x-(-7)}{3-x} = \frac{3}{2}$$

$$9 - 3x = 2x + 14$$

$$x = -1$$

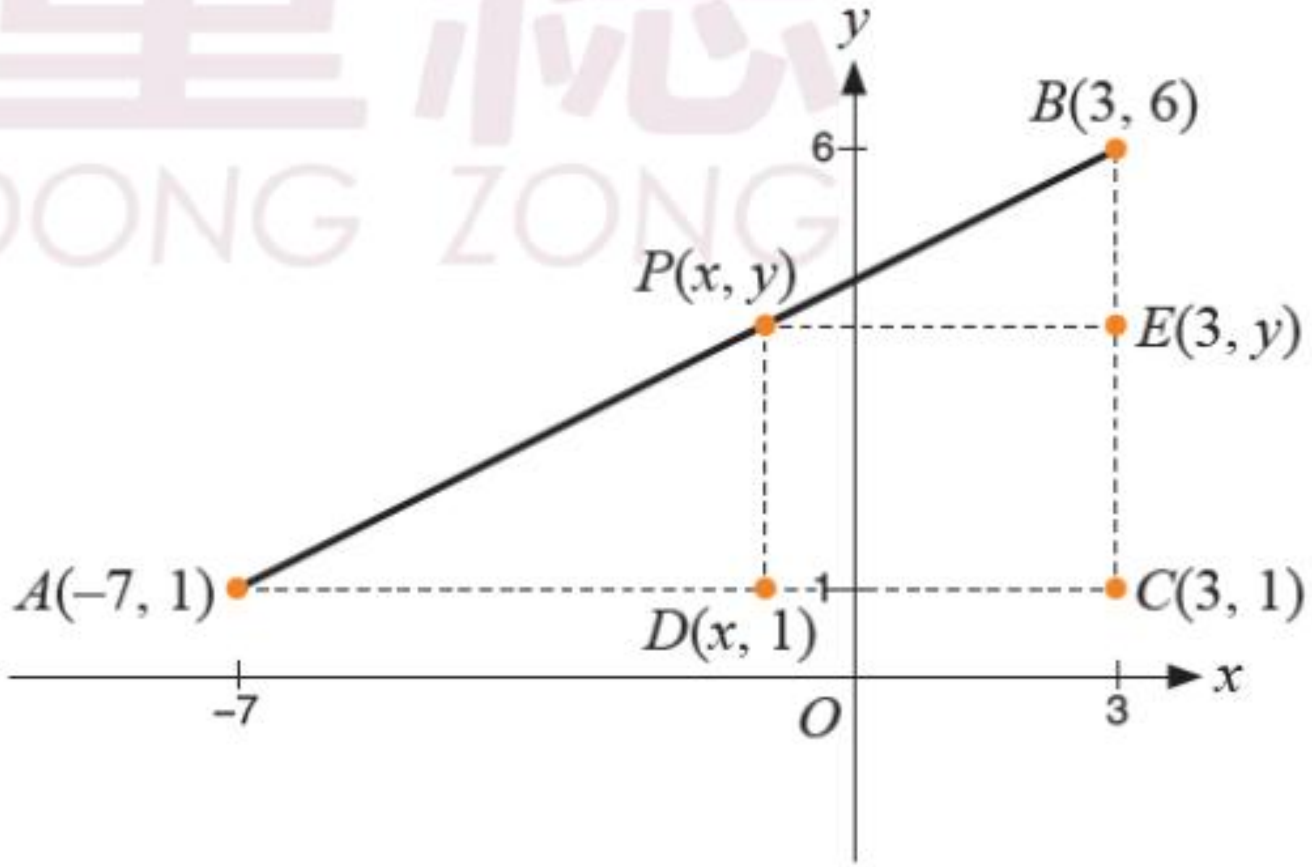
同理，

$$\frac{PD}{BE} = \frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{y-1}{6-y} = \frac{3}{2}$$

$$2y - 2 = 18 - 3y$$

$$y = 4$$



$\therefore$ P 的坐标为 $(-1, 4)$。

已知两点 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2,$

所示。

由于 $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$，由图可得 $\frac{AE}{ED} =$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{m}{n}$$

$$nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$(m+n)x = mx_2 + nx_1$$

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

同理可得，

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

分比公式推导

已知两点 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$，点 $P(x, y)$ 内分线段 AB 成 $m : n$，如图 1-4 所示。

由于 $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{m}{n}$，由图可得 $\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{m}{n}$，即

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n}$$

$$nx-nx_1=mx_2-mx$$

$$(m+n)x=mx_2+nx_1$$

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

同理可得，

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

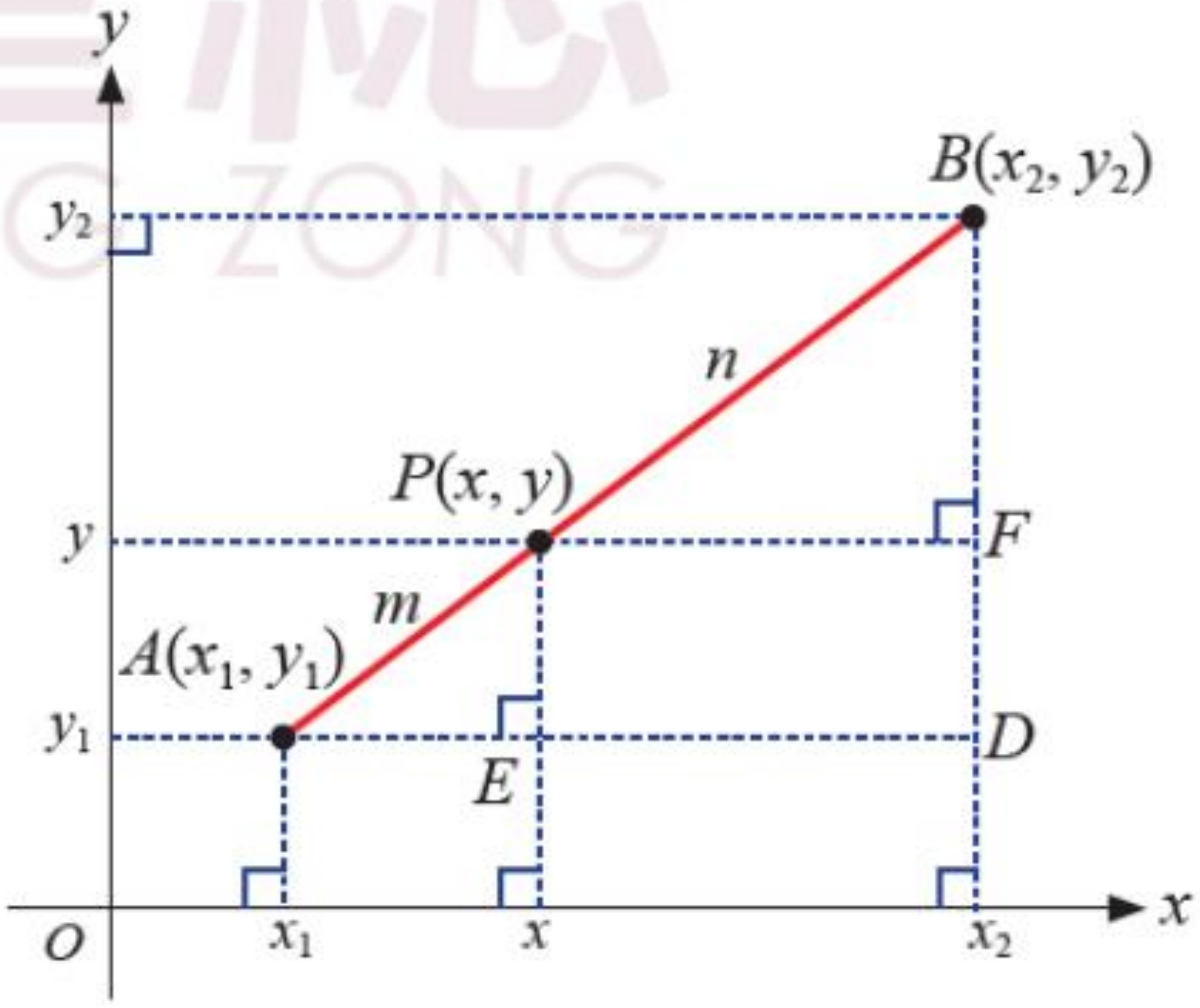
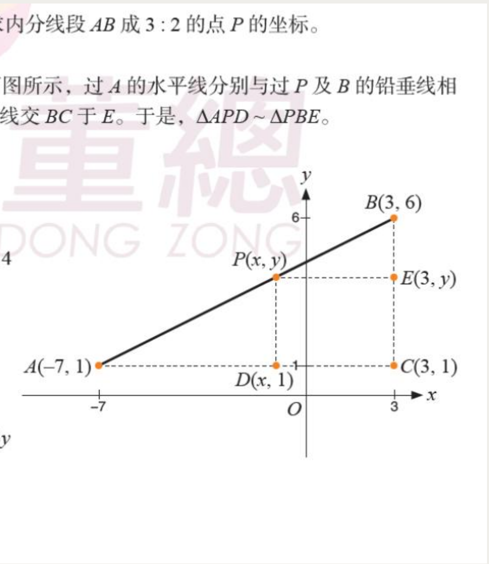


图 1-4

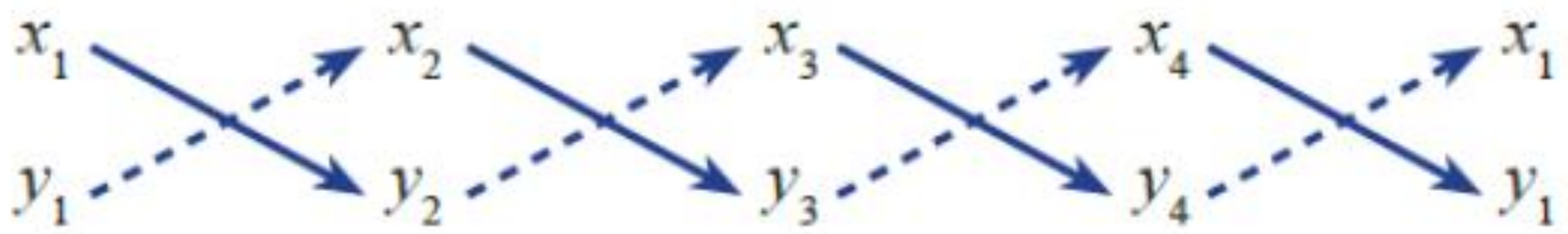


多边形的面积

若一个四边形的顶点依序为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 及 (x_4, y_4)，则

四边形的面积 $= \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)|$。

上述的公式可以用以下的方法帮助记忆：



五边形或多于五边的多边形的面积，都可仿照以上的方法计算。惟，求面积之前必须先确定各顶点在坐标平面上的位置。接着，任取一顶点作为起点，然后将其余顶点依$\boxed{\text{逆时针排列}}$，并将起点的坐标重复写在最后一列。最后，才进行面积计算。

求以 (–3, –1)，(–1, 4)，(5,
的面积。

解 先在坐标平面上标出
从任意点开始，依逆

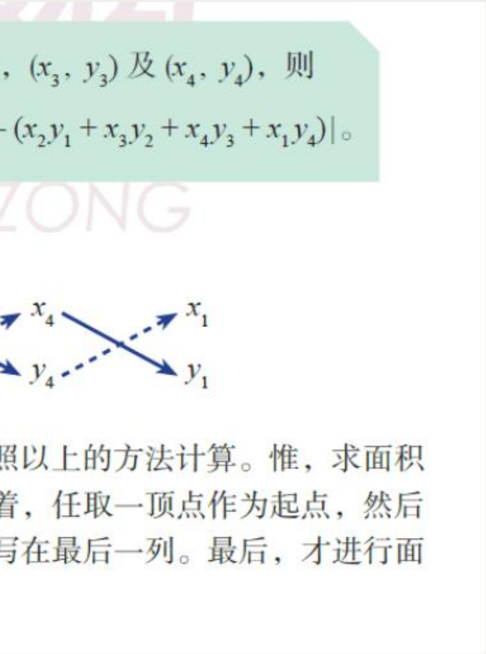
4 –1 –3
4 4 –1

五边形面积

$= \frac{1}{2}[(16 + 1 + 6 + 0 + 2$

$= \frac{69}{2}$

多边形的面积

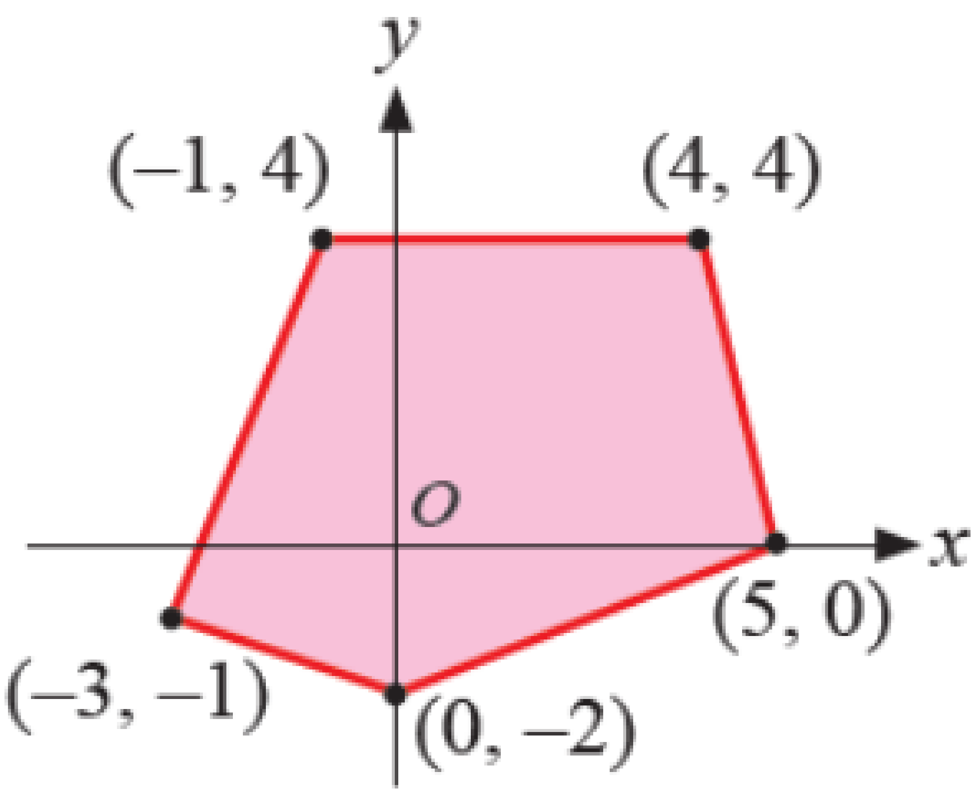


求以 (–3, –1)，(–1, 4)，(5, 0)，(4, 4) 及 (0, –2) 为顶点的凸五边形 (convex pentagon) 的面积。

解 先在坐标平面上标出各点，如右图所示。

从任意点开始，依逆时针将各顶点的坐标写下。

$$\begin{array}{cccccc} 4 & -1 & -3 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & -2 & 0 & 4 \end{array}$$



五边形面积

$$= \frac{1}{2}\boxed{[(16 + 1 + 6 + 0 + 20) - (-4 - 12 + 0 - 10 + 0)]}$$

$$= \frac{69}{2}$$

直线斜率符号的判定-探索活动

目的：探索经过两点的直线的斜率。

工具：https://www.geogebra.org/m/hrz272pq

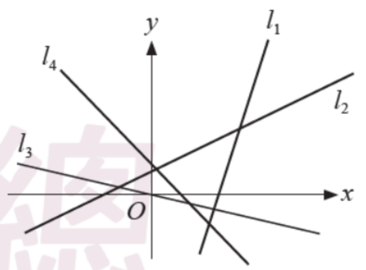
步骤：

1. 左右水平移动点 A，观察直线 AB 的斜率的大 小与正负符号变化，以及倾斜程度。

2. 上下垂直移动点 B，观察直线 AB 的斜率的大 小与正负符号变化，以及倾斜程度。

随堂练习 1.4a

1. 如右图所示，直线 l_1、l_2、l_3、l_4 的斜率分别为 m_1、m_2、m_3、m_4。比较这四个斜率的大小。



第 1 题用图

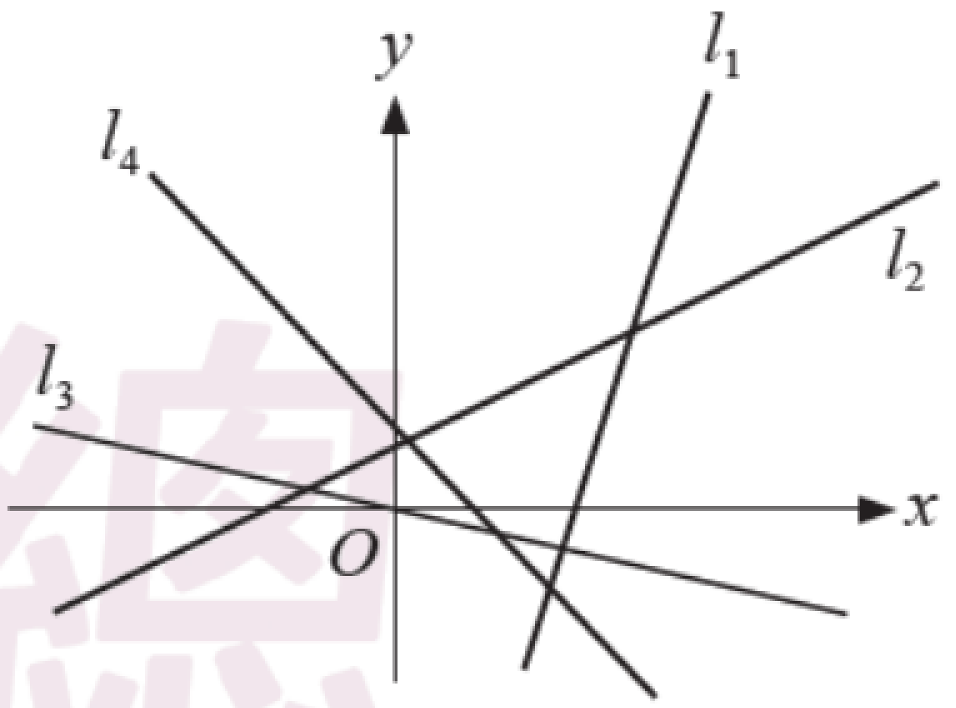
直线斜率符号的判定-探索活动

目的：探索经过两点的直线的斜率。
工具：https://www.geogebra.org/m/hrz272pq

步骤：
1. 左右水平移动点 A，观察直线 AB 的斜率的大 小与正负符号变化，以及倾斜程度。
2. 上下垂直移动点 B，观察直线 AB 的斜率的大 小与正负符号变化，以及倾斜程度。

随堂练习 1.4a

1. 如右图所示，直线 l_1、l_2、l_3、l_4 的斜率分别为 m_1、m_2、m_3、m_4。比较这四个斜率的大小。

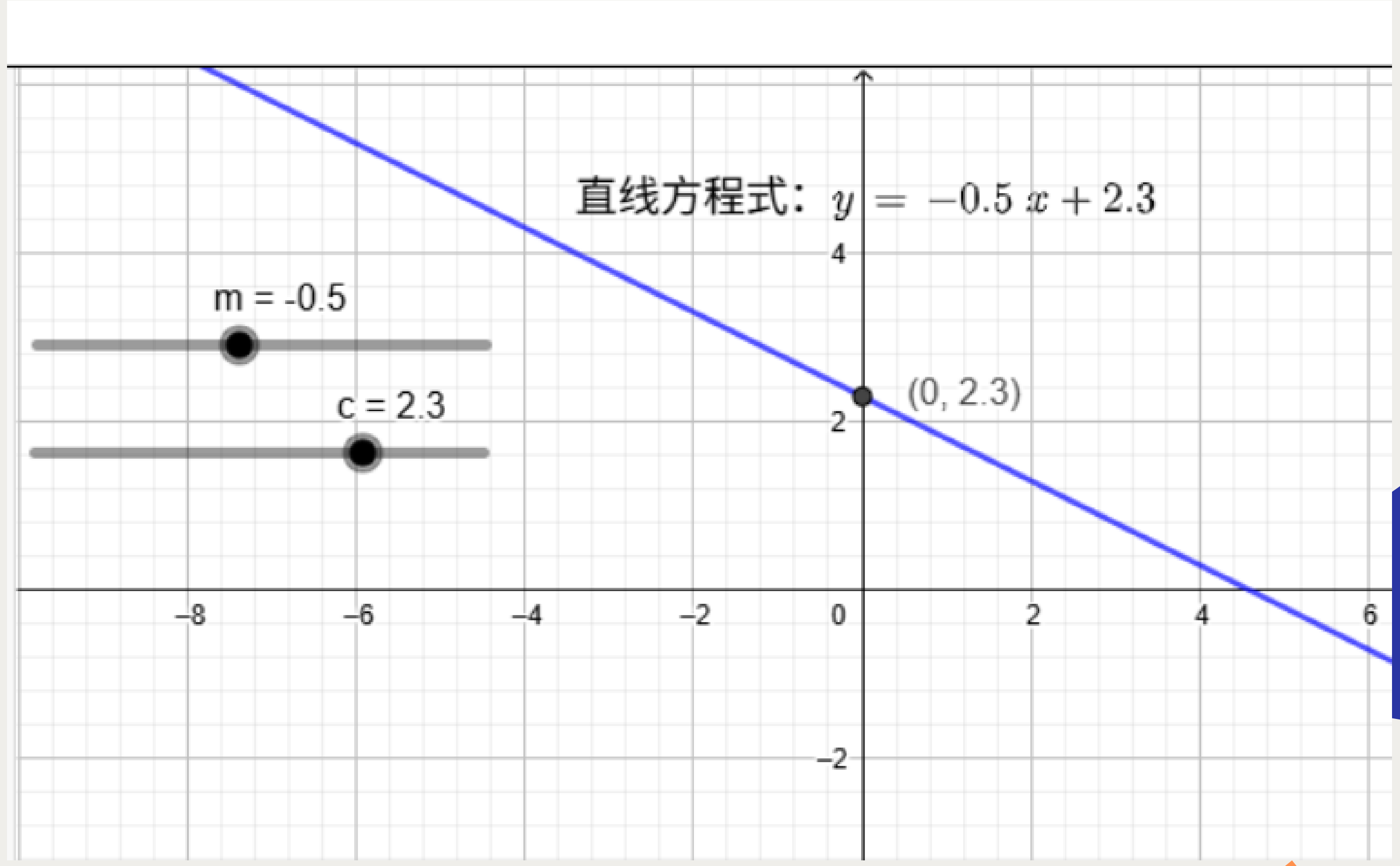


第 1 题用图

直线方程式-探索活动

目的：观察直线的变化。。
工具： https://www.geogebra.org/m/ahhaxarv

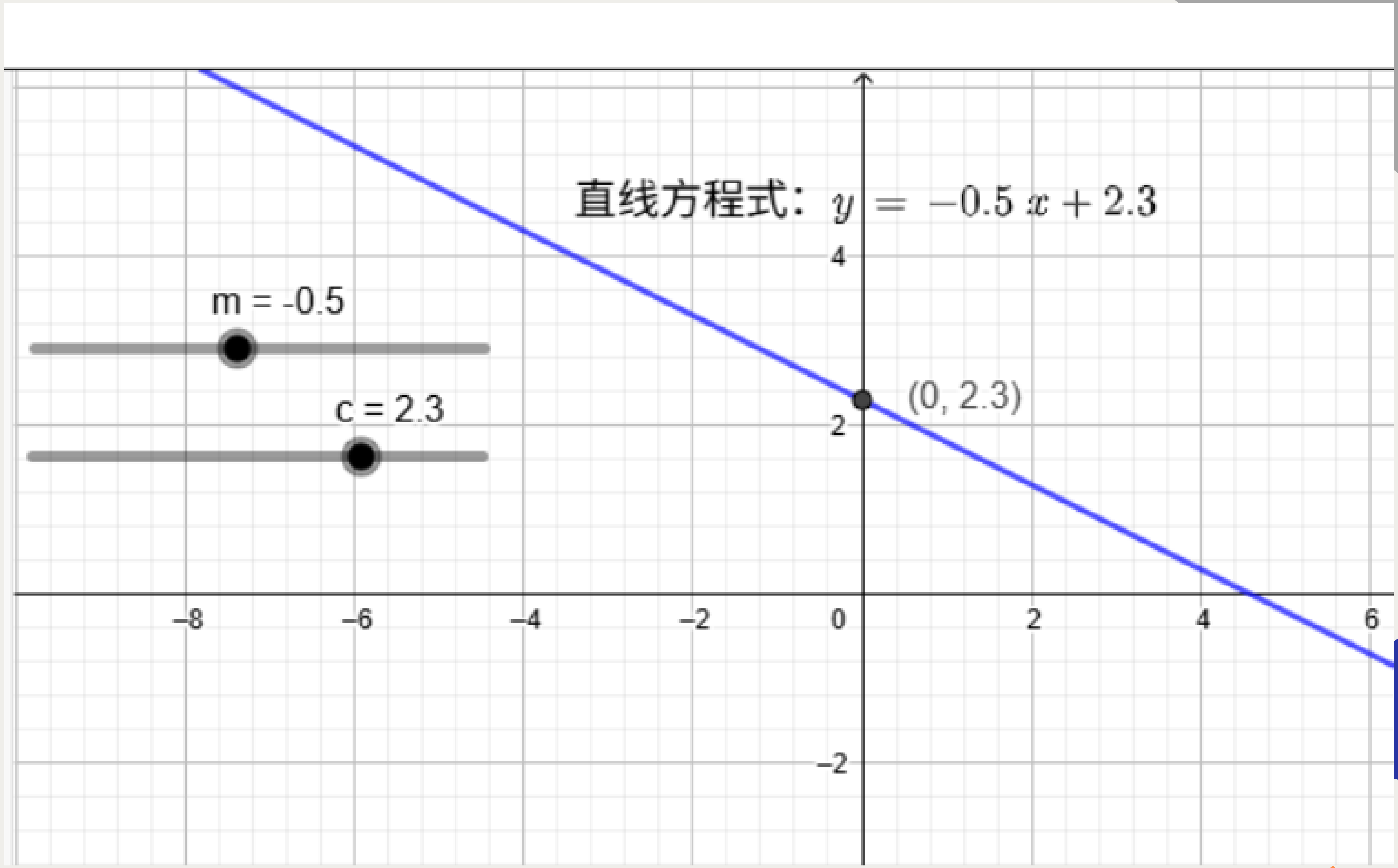
步骤：
1. 滑动滑杆 m，观察直线的变化。
2. 滑动滑杆 c，观察直线的变化



直线方程式-探索活动

目的：观察直线的变化。。
工具：https://www.geogebra.org/m/ahhaxarv

步骤：
1. 滑动滑杆 m，观察直线的变化。
2. 滑动滑杆 c，观察直线的变化



两条直线的交点-保留平行/相交/垂直

已知两条直线 $l_1: x+my+1=0$ 及 $l_2:(m+2)x+3y+3=0$。当 m 为何值时，l_1 与 l_2

(a) 平行?

(b) 相交于一点?

(c) 垂直?

总复习题

右图所示为一梯形 $ABCD$，AB 的垂直平分线与射线 DA 交于点 E，已知 ED 与 BC 平行，且点 D 在 y 轴上，求

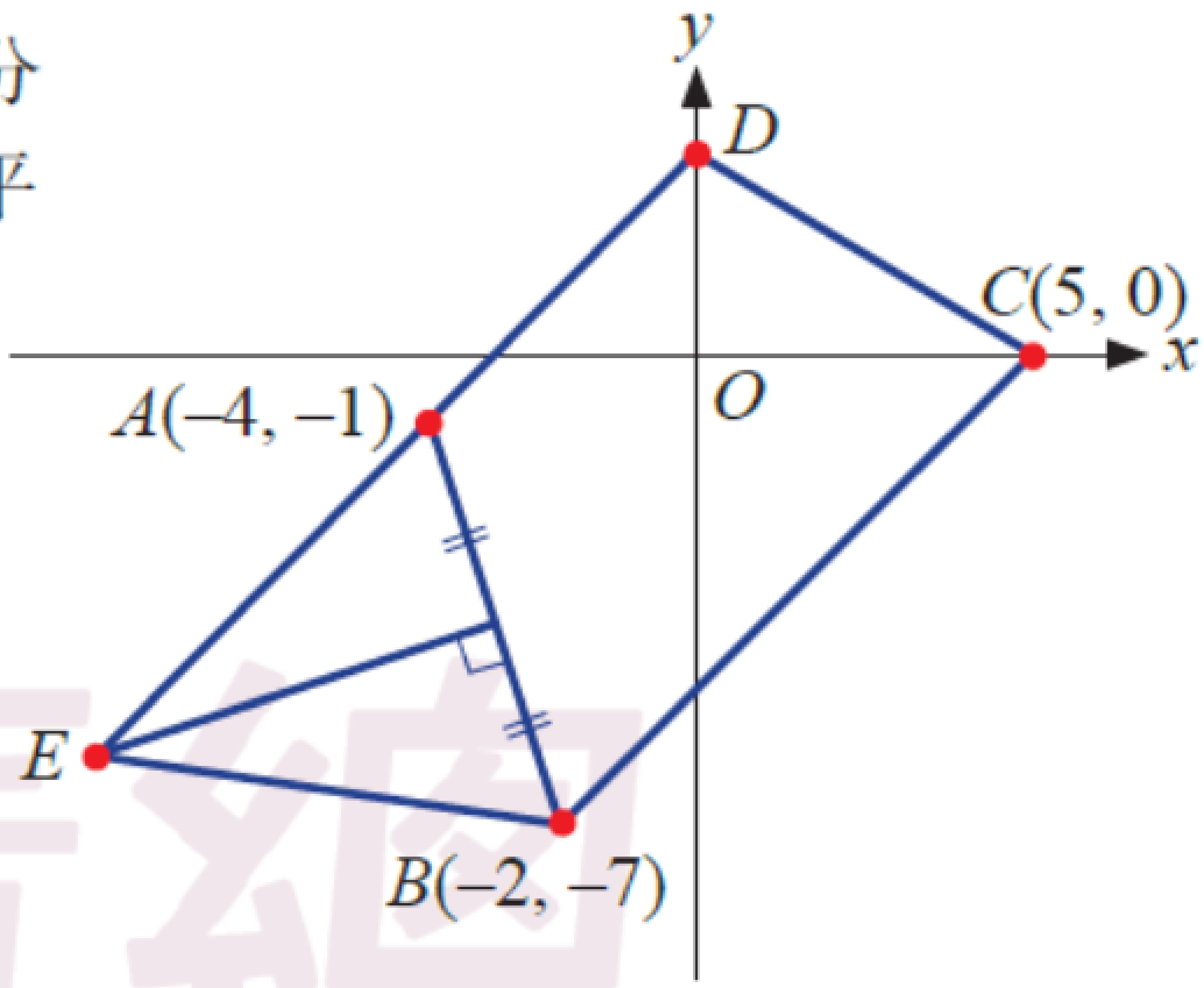
(a) ED 的方程式；

(b) 点 D 的坐标；

(c) AB 的垂直平分线的方程式；

(d) 点 E 的坐标；

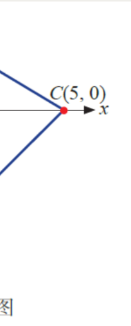
(e) 四边形 $BCDE$ 的面积。



第 13 题用图

在经济
其中 Q
的供给
位?

总复习题



在经济学的供需问题中，已知需求方程：$Q_d=50-5p$，供给方程：$Q_s=10+5p$，其中 Q_d 是需求量，Q_s 是供给量，p 是价格 (RM)。若消费者的需求量和生产者的供给量相等以达致市场均衡，那么价格应该订为多少？均衡数量应为多少单位？

Chapter 2
一元二次方程式与二次函数

学习目标

- ★ 认识一元二次方程式
- ★ 利用判别式讨论一元二次方程式的根的性质（相异实根、相等实根、无实根）
- ★ 利用一元二次方程式的根与系数的关系进行相关计算
- ★ 认识二次函数并掌握其作图法
- ★ 将二次函数写成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式并求其最值
- ★ 解二次函数最值的相关应用问题
- ★ 分析抛物线与直线的位置关系

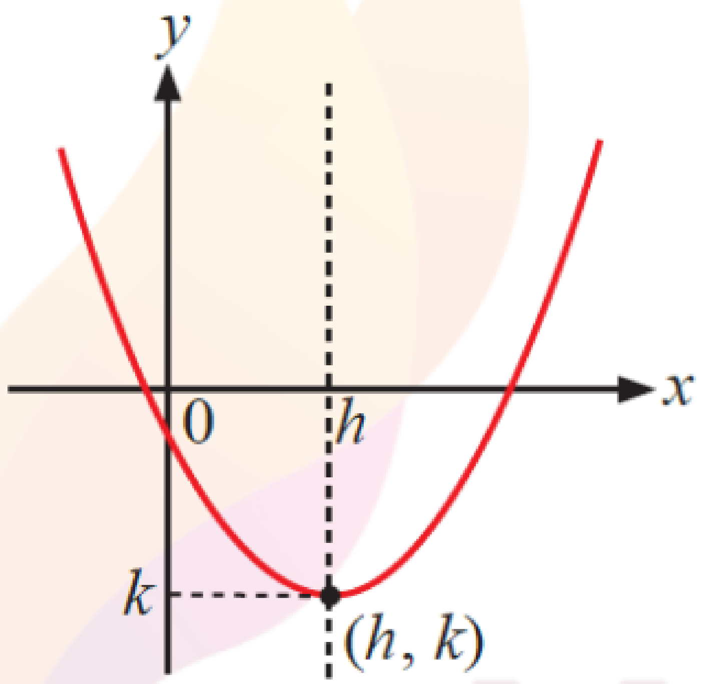
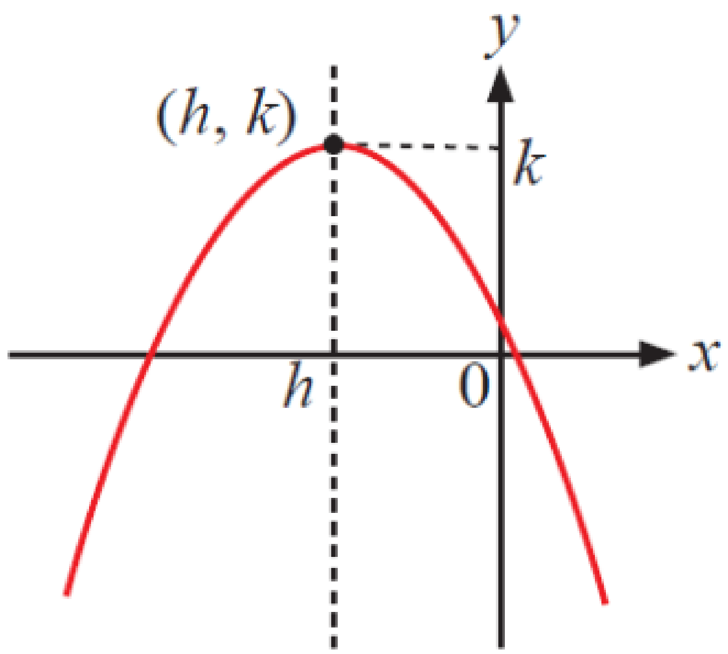
Chapter 2 一元二次方程式与二次函数

学习目标

- ★ 认识一元二次方程式
- ★ 利用判别式讨论一元二次方程式的根的性质（相异实根、相等实根、无实根）
- ★ 利用一元二次方程式的根与系数的关系进行相关计算
- ★ 认识二次函数并掌握其作图法
- ★ 将二次函数写成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式并求其最值
- ★ 解二次函数最值的相关应用问题
- ★ 分析抛物线与直线的位置关系

二次函数的图像与最值

由以上的讨论，总结一元二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图像及性质如下：

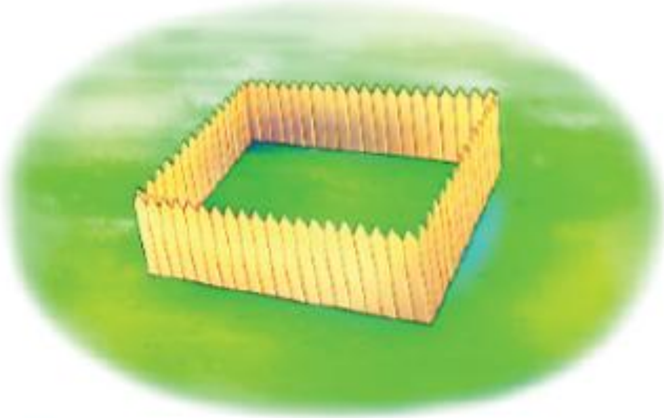
	$a > 0$	$a < 0$
图像		
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x = h$	
顶点	(h, k) 最低点	(h, k) 最高点
最值	在 $x = h$ 时，y 有最小值 k	在 $x = h$ 时，y 有最大值 k

最大值 (maximum value) 与最小值 (minimum value) 统称为最值 (extreme value)。

二次函数最值相关应用问题

例题 22

如右图所示，小龙要用长 40 m 的篱笆围成一长方形菜园，问应该怎样围，才能围出最大面积？最大面积是多少？

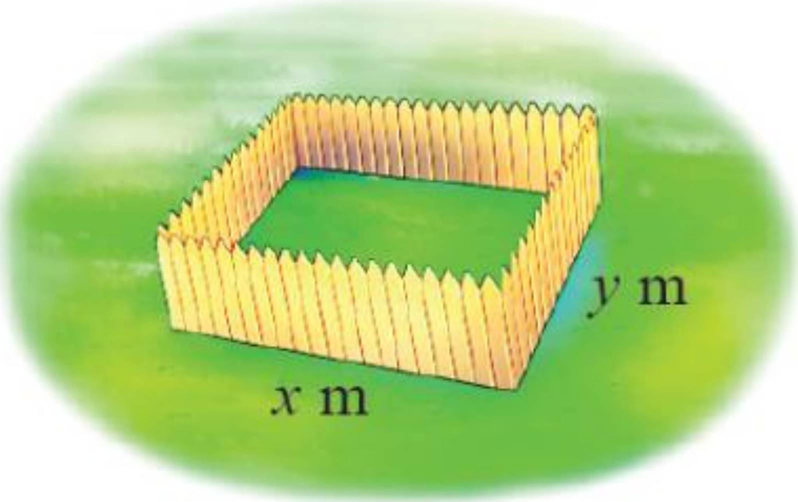


解 设所围出的长方形菜园的长为 x m，宽为 y m，则

周长 $2x+2y=40$

$x+y=20$

$y=20-x$



面积 $A=xy$

$=x(20-x)$

$=20x-x^2$

$=-(x^2-20x+10^2-10^2)$

$=-(x-10)^2+100$

当 $x=10$ 时，A 有最大值 100，此时 $y=20-10=10$。

∴ 当所围出的长及宽皆为 10 m 时，菜园的面积达到最大，即 100 m^2。

一元二次函数的图像与直线的位置关系

判别式	根的性质	抛物线与直线的交点个数	抛物线与直线的位置关系
>0	两个相异的实根	2 个	相交于两点
$=0$	两个相等的实根	1 个	相交于一点（相切）
<0	没有实根	0 个	没有交点

例题 24

若抛物线 $y = x^2 - 2kx + k^2$ 与直线 $y =$

解 抛物线 $y = x^2 - 2kx + k^2$ 与直线 y

可得方程组 $\begin{cases} y = x^2 - 2kx + k^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ 。

可得方程式 $x^2 - 2kx$

$x^2 - 2kx - 2x + k$

$x^2 - 2(k + 1)x + (k^2$

当抛物线与直线相交，方程式 x

$\therefore$ 判别式

$[-2(k + 1)]^2 - 4(1)(k^2 + 1$

$4(k + 1)^2 - 4(k^2 + 1$

$k^2 + 2k + 1 - k^2 - 1$

$2k$

k

一元二次函数的图像与直线的位置关系

	抛物线与直线的位置关系
	相交于两点
	相交于一点（相切）
	没有交点

例题 24

若抛物线 $y = x^2 - 2kx + k^2$ 与直线 $y = 2x - 1$ 相交，求 k 的取值范围。

解 抛物线 $y = x^2 - 2kx + k^2$ 与直线 $y = 2x - 1$ 相交，

可得方程组 $\begin{cases} y = x^2 - 2kx + k^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$。经代入消元法化简，

可得方程式

$$x^2 - 2kx + k^2 = 2x - 1$$
$$x^2 - 2kx - 2x + k^2 + 1 = 0$$
$$x^2 - 2(k + 1)x + (k^2 + 1) = 0$$

当抛物线与直线相交，方程式 $x^2 - 2(k + 1)x + (k^2 + 1) = 0$ 有实根

$$\therefore \text{判别式} \geq 0$$
$$[-2(k + 1)]^2 - 4(1)(k^2 + 1) \geq 0$$
$$4(k + 1)^2 - 4(k^2 + 1) \geq 0$$
$$k^2 + 2k + 1 - k^2 - 1 \geq 0$$
$$2k \geq 0$$
$$k \geq 0$$

Chapter 3
多项式

学习目标

★ 掌握多项式的运算

★ 应用余式定理及因式定理来处理多项式的问题

★ 掌握一元多项式的因式分解，进而解一元高次方程式

Chapter3 多项式

学习目标

- ★ 掌握多项式的运算
- ★ 应用余式定理及因式定理来处理多项式的问题
- ★ 掌握一元多项式的因式分解，进而解一元高次方程式

长除法

例题 6

计算 $(6x^4 - x^3 - 22x^2 + 17x - 3) \div (2x - 3)$。

解 利用长除法，

$$
\begin{array}{rr}
 & 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1 \\
\cline{2-2}
2x - 3 \big) & 6x^4 - x^3 - 22x^2 + 17x - 3 \\
 & 6x^4 - 9x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\cline{2-2}
 & 8x^3 - 22x^2 \qquad\qquad \\
 & 8x^3 - 12x^2 \qquad\qquad \\
\cline{2-2}
 & -10x^2 + 17x \qquad \\
 & -10x^2 + 15x \qquad \\
\cline{2-2}
 & 2x - 3 \\
 & 2x - 3 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

多项式除以多项式时，可以用长除
其他除法可见数学橱窗 1。

数学橱窗 (1

https://bit.ly/4l8fYEK

https://bit.ly/4l8fY

长除法

多项式除以多项式时，可以用长除法计算。

其他除法可见数学橱窗 1。

…− 3) ÷ (2x − 3)。

$$
\begin{array}{r}
3x^3 + 4x^2 - 5x + 1 \\
2x - 3\,\overline{)\,6x^4 - x^3 - 22x^2 + 17x - 3} \\
\underline{6x^4 - 9x^3 \qquad\qquad\qquad\quad} \\
8x^3 - 22x^2 \qquad\qquad \\
\underline{8x^3 - 12x^2 \qquad\qquad} \\
-10x^2 + 17x \qquad \\
\underline{-10x^2 + 15x \qquad} \\
2x - 3 \\
\underline{2x - 3}
\end{array}
$$

数学橱窗 1

https://bit.ly/4l8fYEK

https://bit.ly/4l8fYEK

多项式的因式分解/一元高次多项式
保留一元三次多项式

例题 35

解方程式 $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = 0$。

解 设 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$

$\because f(2) = 0$， $\therefore x - 2$ 是因式

应用长除法，可得

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 7x + 6 \\
\hline
x - 2 & 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 \\
 & 2x^3 - 4x^2 \\
\hline
 & 7x^2 - 8x \\
 & 7x^2 - 14x \\
\hline
 & 6x - 12 \\
 & 6x - 12 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

数学橱窗

https://bit.ly/418f

https://bit.ly/4l8fY

长除法

$$
\begin{array}{r}
2x^2 + 7x \;+\; 6 \\
2\,\big)\; 2x^3 + 3x^2 - \;\; 8x - 12 \\
2x^3 - 4x^2 \qquad\qquad \\
\hline
7x^2 - \;\; 8x \qquad \\
7x^2 - 14x \qquad \\
\hline
6x - 12 \\
6x - 12 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

https://bit.ly/4l8fYEK

Chapter 4
无理式

学习目标

★ 理解根式的意义

★ 掌握根式的基本性质

★ 掌握根式的运算

★ 掌握有理化分母的方法

Chapter4 无理式

学习目标

★ 理解根式的意义

★ 掌握根式的基本性质

★ 掌握根式的运算

★ 掌握有理化分母的方法

概念加强

例题 2

化简下列各式：

(a) $\left(\sqrt{a}\right)^2$

(b) $\sqrt{(-a)^2}$

(c) $\left(\sqrt[3]{-a}\right)^3$

(d) $\sqrt[5]{(x-2)^5}$

同次根式、异次根式

根指数相同的根式称为同次根式，例如：$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{5}$ 是同次根式。根指数不同的根式称为异次根式，例如：$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{5}$ 是异次根式。

异次根式可利用根式的基本性质化为同次根式，把异次根式化为同次根式的方法和分数里的通分很相似，就是求出各个根式的根指数的最小公倍数（L.C.M.），然后应用根式的基本性质，把各个根式的根指数都化为一样的根指数。

例题 4

化下列各题中的根式为同次根式：

(a) $\sqrt[3]{a^2}$，$\sqrt[4]{a}$，$\sqrt[6]{a^5}$　　(b) $\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{-5}$，$\sqrt[4]{2}$

新增概念-根式中因式的外移和内移

例题 6

把下列各式中的根号内能开得尽方的因式以算术根代替移到根号外，使被开方式的每一个因式的指数都小于根指数：

(a) $\sqrt{x^3y^2}$ (b) $\sqrt[3]{x^6y^4}$

解

(a) $\sqrt{x^3y^2}=\sqrt{x^2y^2}\cdot\sqrt{x}$

$=xy\sqrt{x}$

(b) $\sqrt[3]{x^6y^4}=\sqrt[3]{x^6y^3}\cdot\sqrt[3]{y}$

$=x^2y\sqrt[3]{y}$

例题 7

把下列各

(a) $a\sqrt{ab}$

解

(a) $a\sqrt{ab}$

新增概念-根式中因式的外移和内移

例题 7

把下列各式中的根号外面的因式移到根号里面：

(a) $a\sqrt{ab}$　　(b) $x^2y\sqrt[3]{z^2}$

解

(a) $a\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{ab}$

$= \sqrt{a^3b}$

(b) $x^2y\sqrt[3]{z^2} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{z^2}$

$= \sqrt[3]{x^6y^3z^2}$

移到根号外，使被开方式

$y^3 \cdot \sqrt[3]{y}$

$\sqrt[3]{y}$

根式的运算

$$\sqrt[3]{16x}+\sqrt[6]{9x^2}-4\sqrt[9]{27x^3}+5\sqrt[15]{32x^5}$$

$$=\sqrt[3]{8\cdot 2x}+\sqrt[6]{(3x)^2}-4\sqrt[9]{(3x)^3}+5\sqrt[15]{(2x)^5}$$

$$=2\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{3x}-4\sqrt[3]{3x}+5\sqrt[3]{2x}$$

$$=7\sqrt[3]{2x}-3\sqrt[3]{3x}$$

$$\sqrt[5]{a^2b}\div\sqrt[5]{a^3b^4}=$$

根式的运算

$\sqrt{32x^5}$

$^3 + 5\sqrt[15]{(2x)^5}$

$2x$

$$\sqrt[5]{a^2b} \div \sqrt[5]{a^3b^4} = \frac{\sqrt[5]{a^2b}}{\sqrt[5]{a^3b^4}} \cdot \frac{\sqrt[5]{a^2b}}{\sqrt[5]{a^2b}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{a^4b^2}}{\sqrt[5]{a^5b^5}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{a^4b^2}}{ab}$$

不特地强调无理方程式

例题 19

解方程式 $\sqrt{x-1} = x - 3$。

解

$$\sqrt{x-1} = x-3$$
$$(\sqrt{x-1})^2 = (x-3)^2$$
$$x-1 = x^2-6x+9$$
$$x^2-7x+10=0$$
$$(x-2)(x-5)=0$$
$$x-2=0 \quad \text{或} \quad x-5=0$$
$$x=2 \qquad\qquad x=5$$

例题 20

已知 $A(-6, 0)$，$B(12, 6)$ 两点，C 是 y 轴上的一点使得 $2AC = B$
标。

解 设点 C 的坐标是 $(0, c)$。

$$2AC = BC$$
$$2\sqrt{[0-(-6)]^2+(c-0)^2} = \sqrt{(0-12)^2+(c-6)^2}$$
$$2\sqrt{c^2+36} = \sqrt{c^2-12c+180}$$
$$4(c^2+36) = c^2-12c+180$$
$$4c^2+144 = c^2-12c+180$$
$$3c^2+12c-36=0$$
$$c^2+4c-12=0$$
$$(c+6)(c-2)=0$$
$$c+6=0 \quad \text{或} \quad c-2=0$$
$$c=-6 \qquad\qquad c=2$$

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(0, -6)$ 或 $(0, 2)$。

不特地强调无理方程式

$+ 9$

$= 0$

$= 5$

例题 20

已知 $A(-6, 0)$，$B(12, 6)$ 两点，C 是 y 轴上的一点使得 $2AC = BC$，求点 C 的坐标。

解 设点 C 的坐标是 $(0, c)$。

$$
\begin{aligned}
2AC &= BC \\
2\sqrt{[0-(-6)]^2 + (c-0)^2} &= \sqrt{(0-12)^2 + (c-6)^2} \\
2\sqrt{c^2 + 36} &= \sqrt{c^2 - 12c + 180} \\
4(c^2 + 36) &= c^2 - 12c + 180 \\
4c^2 + 144 &= c^2 - 12c + 180 \\
3c^2 + 12c - 36 &= 0 \\
c^2 + 4c - 12 &= 0 \\
(c+6)(c-2) &= 0 \\
c + 6 = 0 \quad &\text{或} \quad c - 2 = 0 \\
c = -6 \quad &\quad\quad c = 2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(0, -6)$ 或 $(0, 2)$。

想一想 7

为什么例题 20 不需要检验是否有增根?

Chapter 5
函数

学习目标

- ★ 掌握对应和映射的定义
- ★ 掌握函数的定义及表示法
- ★ 掌握函数的定义域及值域的求法
- ★ 认识基本函数的图像
- ★ 掌握函数图像的变换
- ★ 掌握合成函数的概念及运算
- ★ 理解一对一函数，映成函数及一一映成函数
- ★ 掌握反函数的概念及求法

Chapter 5

函数

学习目标

- ★ 掌握对应和映射的定义
- ★ 掌握函数的定义及表示法
- ★ 掌握函数的定义域及值域的求法
- ★ 认识基本函数的图像
- ★ 掌握函数图像的变换
- ★ 掌握合成函数的概念及运算
- ★ 理解一对一函数，映成函数及一一映成函数
- ★ 掌握反函数的概念及求法

函数值

例题 6

若函数 $g(x) = 2x - 3$，求 $g(1)$，$g(-2)$，$g(a)$，$g(x - 2)$ 的函数值。

解

$$g(x) = 2x - 3$$

$$g(1) = 2(1) - 3 = -1$$

$$g(-2) = 2(-2) - 3 = -7$$

$$g(a) = 2a - 3$$

$$\begin{aligned} g(x-2) &= 2(x-2) - 3 \\ &= 2x - 4 - 3 \\ &= 2x - 7 \end{aligned}$$

例题 7

已知某座城市的人口为 p（p

吨，垃圾生产量与人口的函

(a) 若该城市一共有 160000

f 表示。

(b) 解释 $f(5) = 3$ 所代表的

解 (a) $f(16) = 40$

(b) 每周有 50000 位城

函数值

的函数值。

例题 7

已知某座城市的人口为 p（p 是以 10000 人为单位），每周的垃圾生产量为 G 公吨，垃圾生产量与人口的函数解析式为 $G=f(p)$。

(a) 若该城市一共有 160000 人，每周制造 40 公吨的垃圾，请将这些资料以函数 f 表示。

(b) 解释 $f(5)=3$ 所代表的意义。

解 (a) $f(16)=40$

(b) 每周有 50000 位城市居民制造 3 公吨的垃圾。

函数图像变换探索活动

目的：垂直平移的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/tee9jbn5

目的：垂直伸缩的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/wz6hmy8x

目的：水平平移的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/cszu5566

目的：水平伸缩的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/zpz5bhwg

目的：绝对值函数 (absolute value function) 的 图像的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/bw3fveke

函数图像变换探索活动

目的：垂直平移的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/tee9jbn5

目的：垂直伸缩的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/wz6hmy8x

目的：水平平移的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/cszu5566

目的：水平伸缩的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/zpz5bhwg

目的：绝对值函数 (absolute value function) 的 图像的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/bw3fveke

函数图像变换探索活动

目的：垂直平移的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/tee9jbn5

目的：垂直伸缩的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/wz6hmy8x

目的：水平平移的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/cszu5566

目的：水平伸缩的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/zpz5bhwg

目的：绝对值函数 (absolute value function) 的 图像的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/bw3fveke

函数图像变换探索活动

目的：垂直平移的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/tee9jbn5

目的：垂直伸缩的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/wz6hmy8x

目的：水平平移的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/cszu5566

目的：水平伸缩的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/zpz5bhwg

目的：绝对值函数 (absolute value function) 的 图像的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/bw3fveke

函数图像变换探索活动

目的：垂直平移的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/tee9jbn5

目的：垂直伸缩的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/wz6hmy8x

目的：水平平移的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/cszu5566

目的：水平伸缩的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/zpz5bhwg

目的：绝对值函数 (absolute value function) 的 图像的探究。
工具：https://www.geogebra.org/m/bw3fveke

函数图像变换-教师课堂简易活动

$$y = x^2$$

$$y = x^2 - 2$$

$$y = -x^2$$

$$y = (x+2)^2$$

$$y = x^2 + 2$$

$$y = (x-2)^2$$

简易反函数概念

例题 26

某车在我国高速公路行驶的时间与距离记录如下：

x：行车时间（分钟）	10	25	40	60
$f(x)$：行车距离（公里）	18	40	85	110

求 (a) $f(25)$； (b) $f^{-1}(110)$。

解 (a) 从表得 $f(25) = 40$。 (b) 从表得 $f^{-1}(110) = 60$。

例题 27

从右图求

解 (a) 从

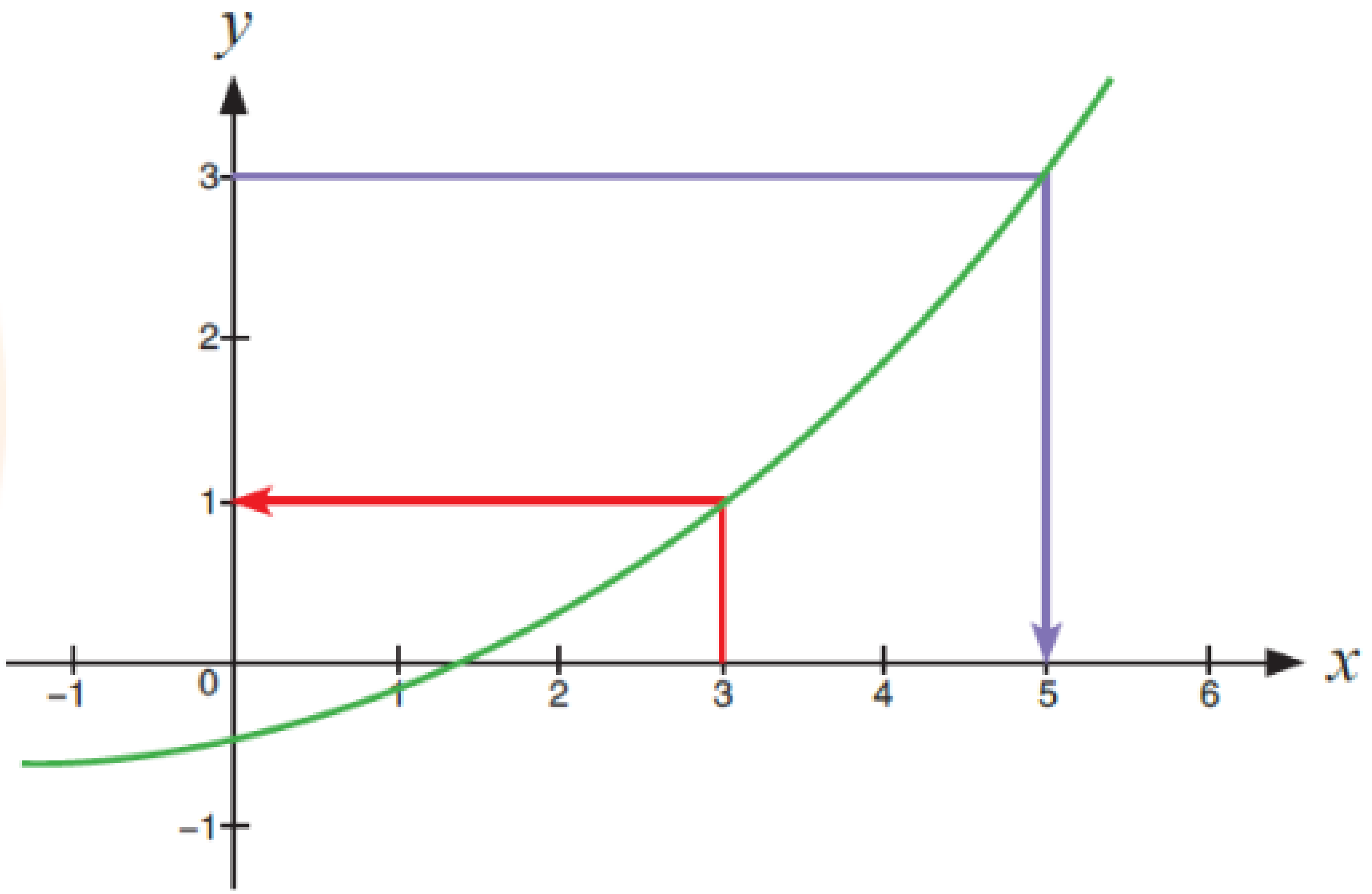
(b) 从

简易反函数概念

例题 27

从右图求 (a) $g(3)$；

(b) $g^{-1}(3)$。



解 (a) 从图得 $g(3)=1$。

(b) 从图得 $g^{-1}(3)=5$。

Chapter 6
不等式

学习目标

★ 掌握不等式的性质

★ 掌握一元二次不等式及不等式组的解法

★ 掌握分式不等式的解法

★ 掌握二元一次不等式及不等式组的图解法

★ 能应用图解法解线性规划问题

Chapter6 不等式

学习目标

- ★ 掌握不等式的性质
- ★ 掌握一元二次不等式及不等式组的解法
- ★ 掌握分式不等式的解法
- ★ 掌握二元一次不等式及不等式组的图解法
- ★ 能应用图解法解线性规划问题

一元二次不等式-概念加强与探索活动

例题 5

解不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$。

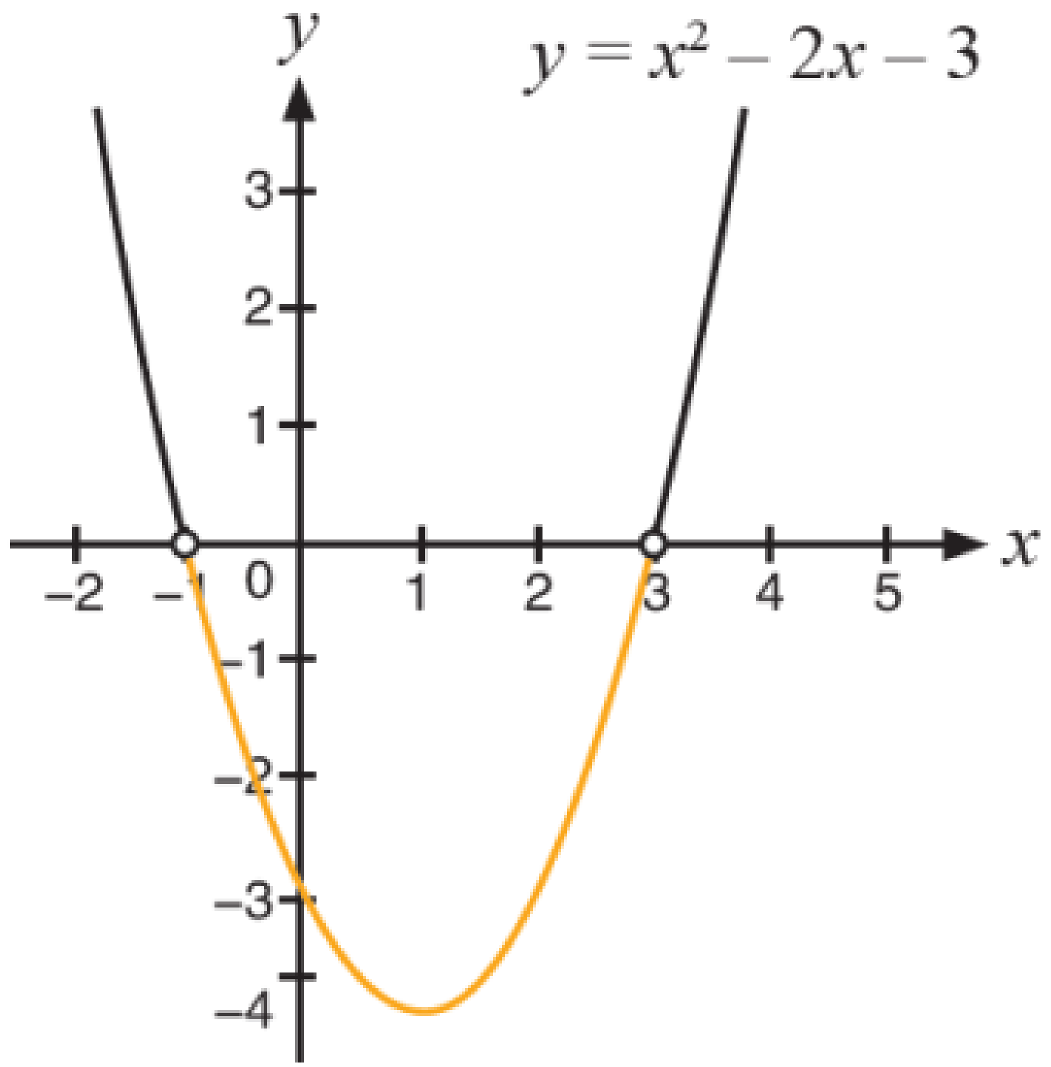
解法一

设 $y = x^2 - 2x - 3$。

$$y = x^2 - 2x - 3$$
$$= (x-3)(x+1)$$

从右图可知，只有当 $-1 < x < 3$ 时，$y < 0$。

$\therefore$ 原不等式的解为 $-1 < x < 3$。



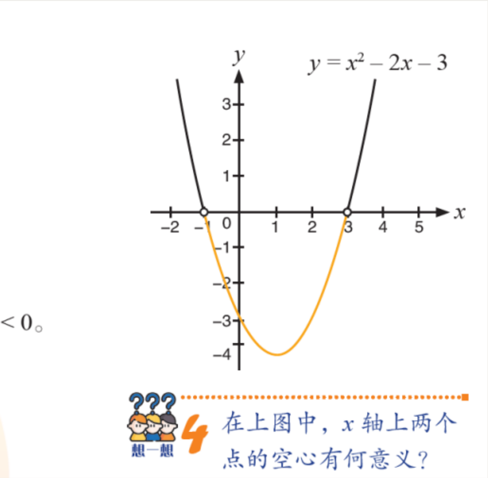
想一想 4

在上图中，x 轴上两个点的空心有何意义？

目的：利用函

工具：https

一元二次不等式-概念加强与探索活动



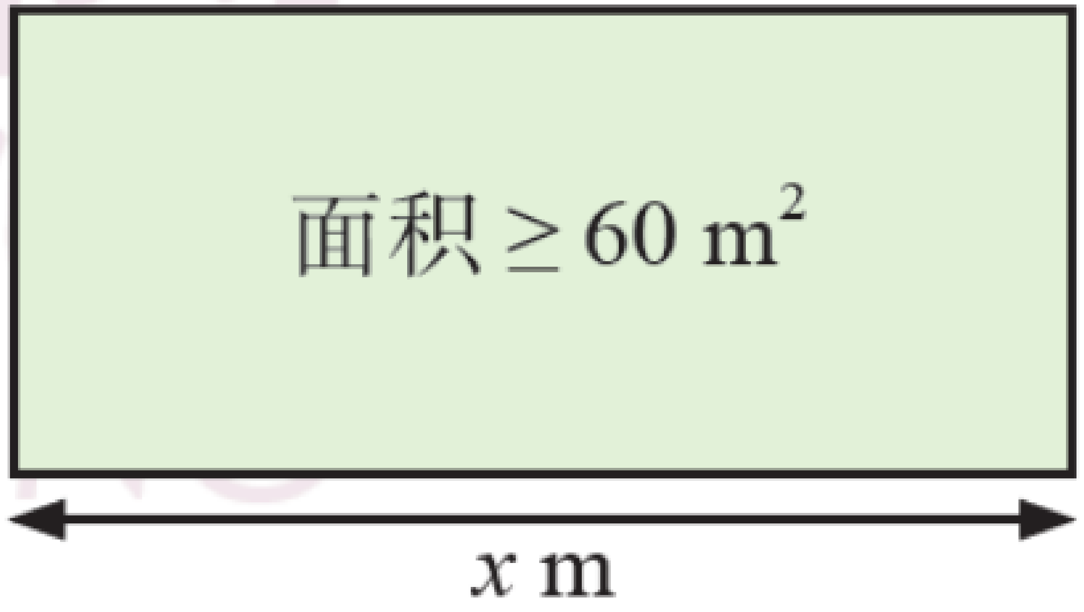
目的：利用函数的图像来解一元二次不等式。

工具：https://www.geogebra.org/m/eenccavs

基本一元二次不等式应用问题

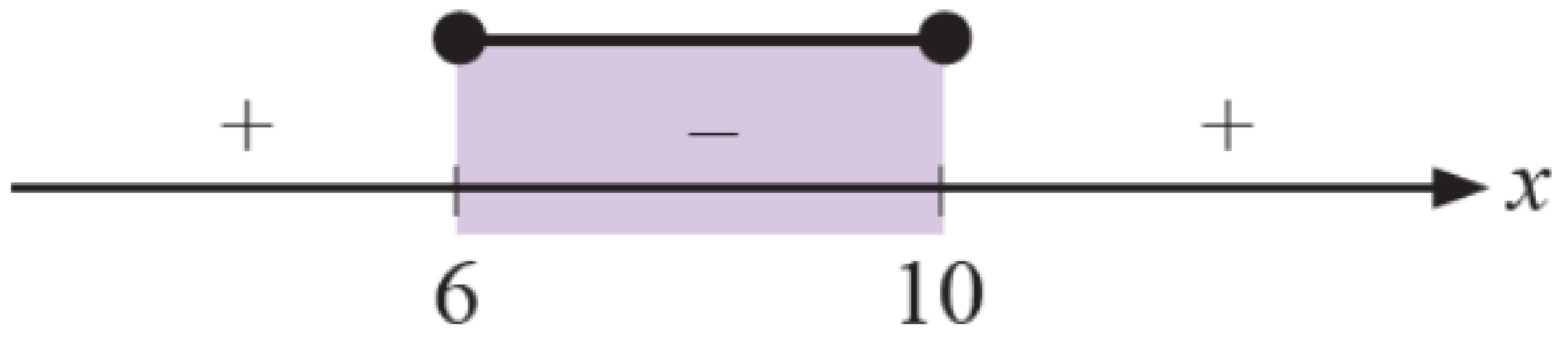
例题 9

小明要用一长 32 m 的篱笆围出一个长方形草地来种水果，其中一边长为 x m。若所围出的长方形面积至少需为 60 m^2，求 x 的取值范围。



解 依题意，长方形另一边长 $\dfrac{32-2x}{2}=(16-x)$ m。

$$x(16-x)\geq 60$$
$$16x-x^2\geq 60$$
$$x^2-16x+60\leq 0$$
$$(x-6)(x-10)\leq 0$$
$$\therefore\ 6\leq x\leq 10$$



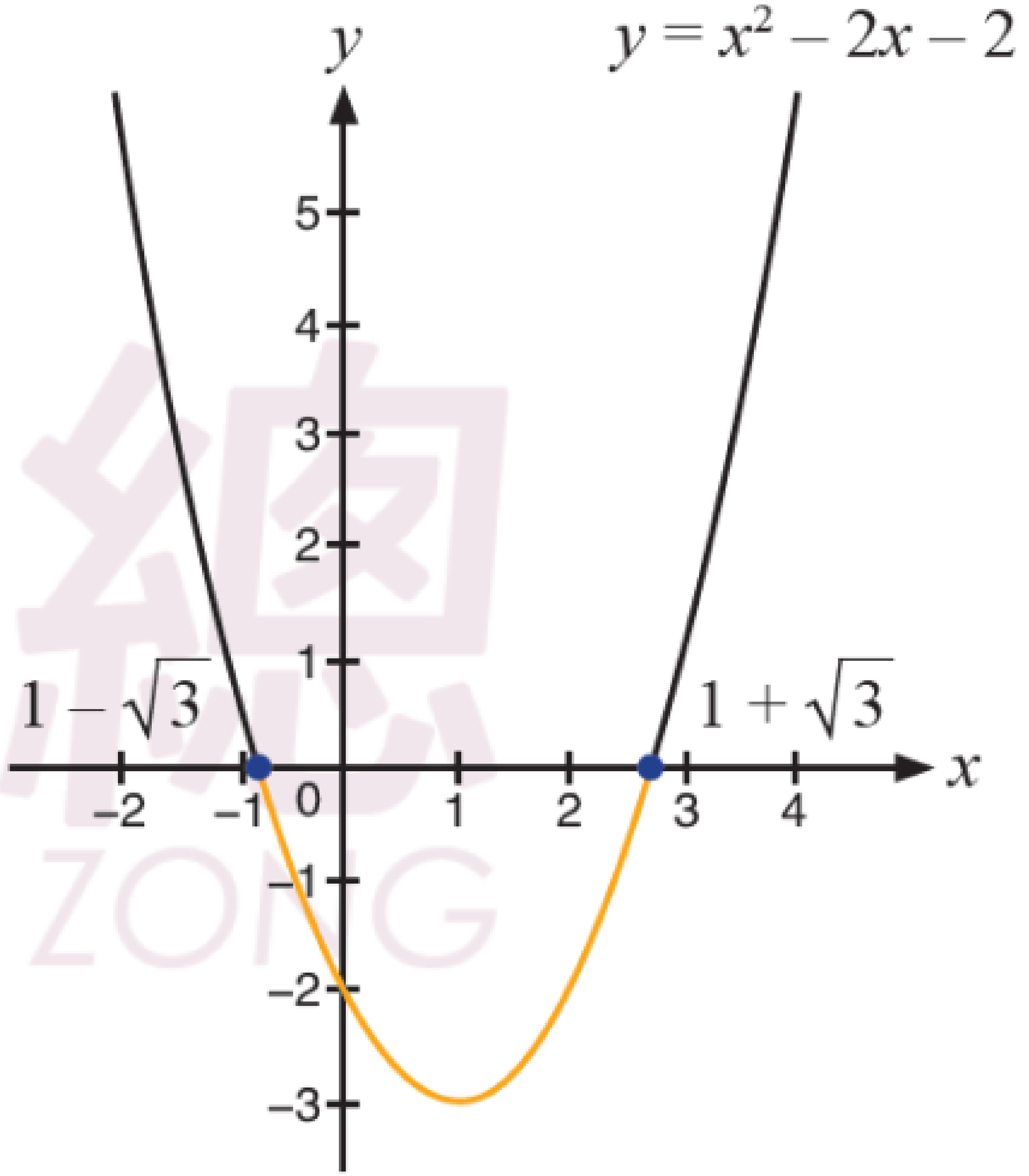
利用公式法

例题 10

解不等式 $x^2 - 2x - 2 \leq 0$。

解 设方程式 $x^2 - 2x - 2 = 0$，则

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \\
&= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\
&= 1 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}
$$



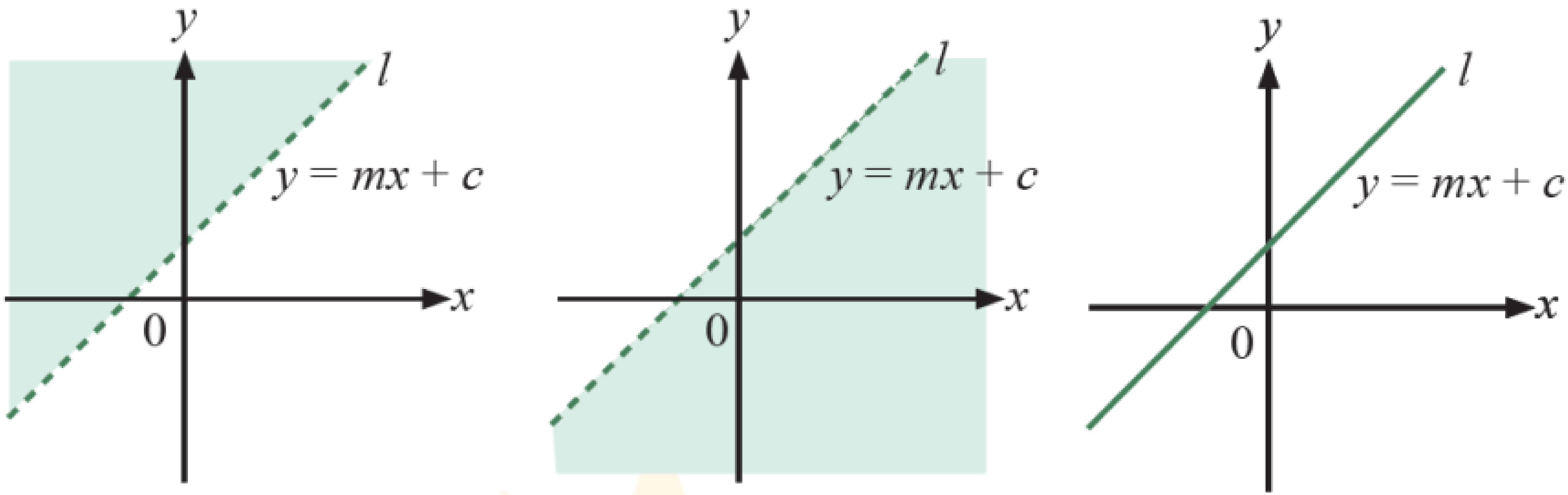
所以，函数 $y = x^2 - 2x - 2$ 的图像经过点 $\left(1-\sqrt{3}, 0\right)$ 及 $\left(1+\sqrt{3}, 0\right)$。

由右图可知，当 $1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3}$ 时，$y \leq 0$。

$\therefore$ 原不等式的解为 $1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3}$。

二元一次不等式概念加强，探索活动

因此可以得知，直线 $y=mx+c$ 把平面分成两个区域。直线上方的区域是满足不等式 $y>mx+c$ 所有的点所成的区域，直线下方的区域则是满足不等式 $y<mx+c$ 所有的点所成的区域，而直线本身则是满足方程式 $y=mx+c$ 所有的点所成的区域。



$y>mx+c$　　$y<mx+c$　　$y=mx+c$

例题

以图

目的:

1. 用

2.

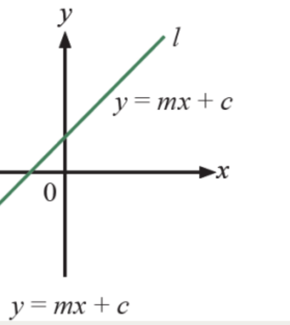
工具:

二元一次不等式概念加强，探索活动

例题 19

以图像表示 $y > x + 1$ 的解。

直线上方的区域是满足
是满足不等式 $y < mx + c$
所有的点所成的区域。



目的：

1. 用工具观察例题 19 的图像。
2. 在坐标平面上取任意点 A，观察其坐标何时满足 $y > x + 1$、$y = x + 1$、$y < x + 1$。

工具：https://www.geogebra.org/m/mc59ppqn

二元一次不等式组探索活动

例题 22

绘出满足不等式组 $\begin{cases} y \geq 2x \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}$ 的区域。

解 **步骤一** 作直线 $y = 2x$ 的图像：

x	0	1
y	0	2

目的：观察不等式组

工具：https://www

二元一次不等式组探索活动

$\begin{cases} y \geq 2x \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}$ 的区域。

线 $y = 2x$ 的图像：

	0	1
	0	2

目的：**观察不等式组所代表的图像。**

工具：https://www.geogebra.org/m/wcrunppa

二元一次不等式组探索活动

例题 26

已知 $z = 3x + 7y$，式中 x 及 y 满足下列的约束条件：

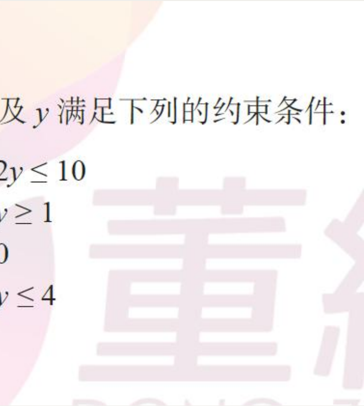
$$\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

求 z 的最大值及最小值。

目的：例题 26

工具：https://

二元一次不等式组探索活动



目的：例题 26 的探究。

工具：https://www.geogebra.org/m/njhgrgkt

Chapter 7
逻辑

学习目标

★ 理解命题的意义

★ 掌握逻辑联结词“非”、“且”及“或”

★ 理解充分条件、必要条件、充要条件的意义

★ 理解全称量词及存在量词的意义

★ 能根据所给的条件作简单推论

Chapter7 逻辑

学习目标

★ 理解命题的意义

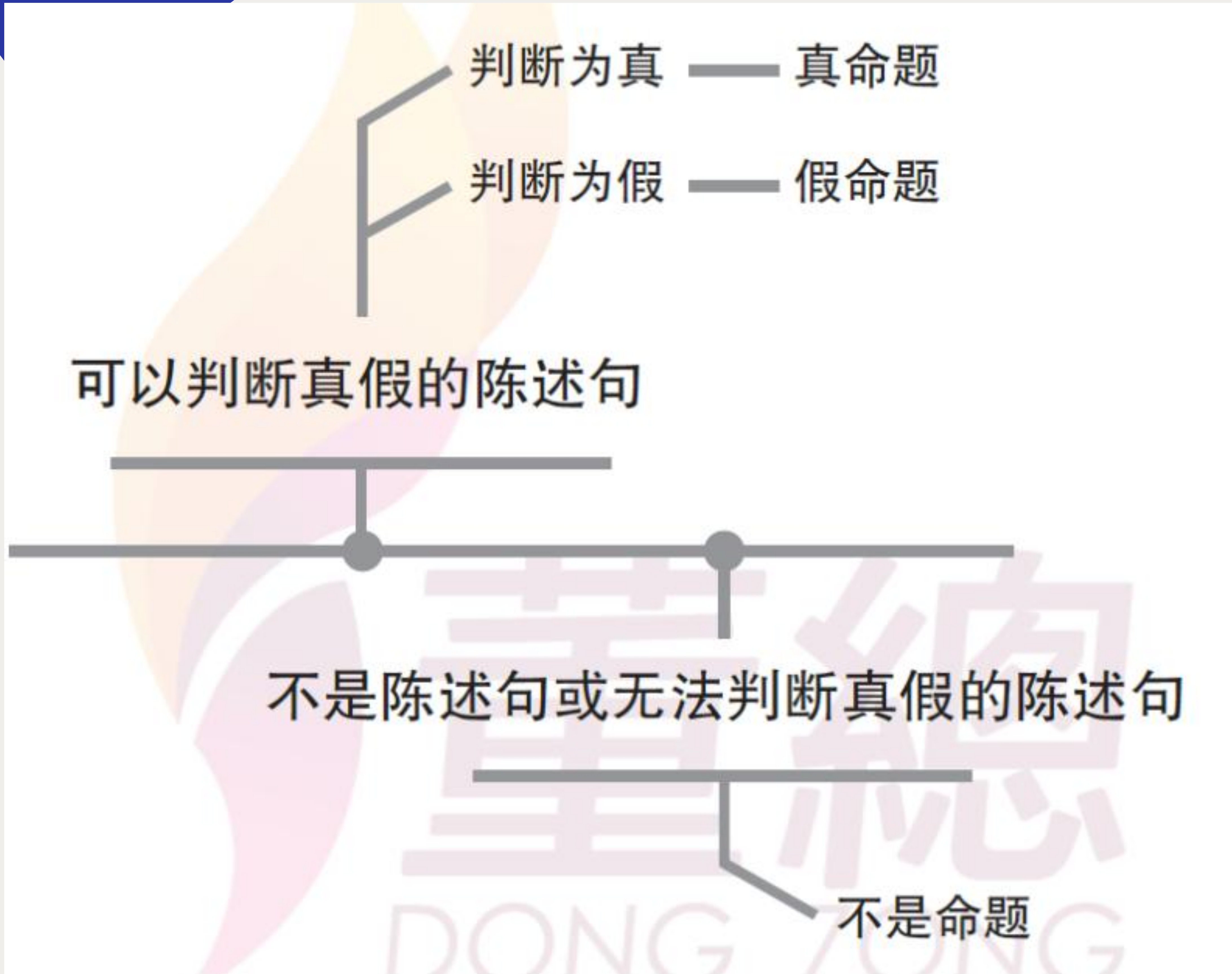
★ 掌握逻辑联结词“非”、“且”及“或”

★ 理解充分条件、必要条件、充要条件的意义

★ 理解全称量词及存在量词的意义

★ 能根据所给的条件作简单推论

命题(Statement)



随堂练习 7.1a

判断下列各语句是否是命题。若

(a) 马来西亚是一个位于东南亚

(b) 午安!

(c) 1234 是 3 的倍数。

(d) 0 是偶数。

(e) 埃及金字塔是棱锥体。

命题(Statement)

随堂练习 7.1a

判断下列各语句是否是命题。若是，判断其真假；若不是，说明其原因。

(a) 马来西亚是一个位于东南亚的国家。

(b) 午安！

(c) 1234 是 3 的倍数。

(d) 0 是偶数。

(e) 埃及金字塔是棱锥体。

的陈述句

命题

蕴涵

在数学中，许多命题可以写成“若 p，则 q”或者“如果 p，那么 q”的形式。其中，p 称为命题的条件或前因 (antecedent)，q 称为命题的结果 (consequent)。“若 p，则 q”可记作“$p \to q$”，读作“p 蕴涵 q”(p implies q)。例如：

1. 若 2 能整除 n，则 n 是偶数。
2. 若土壤肥沃，则农业产量较高。
3. 如果工业发展过快，则环境污染问题会更严重。

如果 p 为真能保证 q 也为真，那么 $p \to q$ 为真命题。例如：

p : 2 能整除 14。

q :14 是偶数。

由于“2 能整除 14”是真命题，且能被 2 整除的数是偶数，因此“14 是偶数”是真命题。故 $p \to q$ 是真命题。

“非”、“且”、“或”

“非”

观察以下两个命题：

p : 正整数 n 是 2 的倍数。

q : 正整数 n 不是 2 的倍数。

这里的 q 是 p 的否定 (negation)，记作“$\sim p$”，读作“非 p”(not p)，其中

若 p 是真命题，则$\sim p$为假命题；

若 p 是假命题，则$\sim p$为真命题。

“且”

观察以下三个

p : 30 能

q : 30 能

r : 30 能

这里的 r 是用

q”（p and q）。

当 p 与 q

当 p 与 q

“或”

观察以下三个命

$p : 3 < 5$

$q : 3 = 5$

$r : 3 \leq 5$

这里的 r 是用

q”（p or q）。

当 p 与 q 中

当 p 与 q 同

“非”、“且”、“或”

“且”

观察以下三个命题：

p：30 能被 6 整除。

q：30 能被 5 整除。

r：30 能被 6 整除且能被 5 整除。

这里的 r 是用“且”将 p 和 q 联结起来的命题，记作“$p \wedge q$”，读作“p 且 q”（p and q）。

当 p 与 q 同时为真命题时，$p \wedge q$ 为真命题；

当 p 与 q 中至少有一个为假命题时，$p \wedge q$ 为假命题。

“非”

观察以下两个

p：正整

q：正整

这里的 q 是 p

若 p 是真

若 p 是假

“或”

观察以下三个命

$p: 3<5$

$q: 3=5$

$r: 3 \leq 5$

这里的 r 是用

q”（p or q）。

当 p 与 q 中

当 p 与 q 同

“非”、“且”、“或”

“或”

观察以下三个命题：

$p: 3<5$

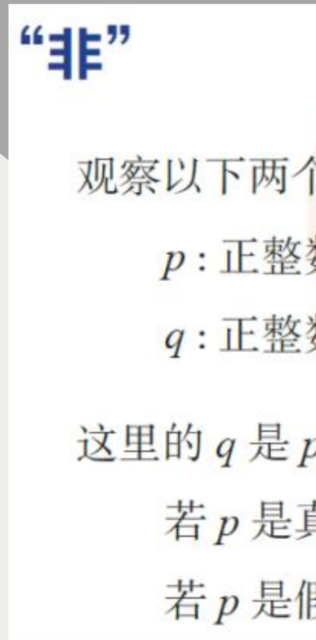
$q: 3=5$

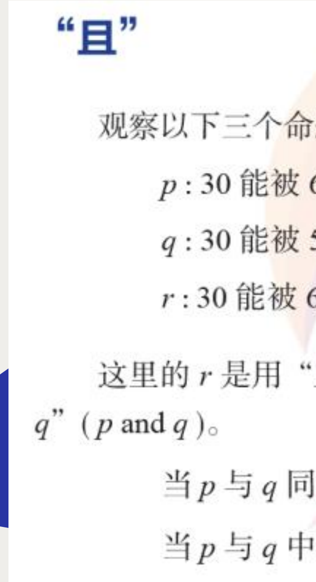
$r: 3 \le 5$

这里的 r 是用“或”将 p 和 q 联结起来的命题，记作“$p \vee q$”，读作“p 或 q”（p or q）。

当 p 与 q 中至少有一个为真命题时，$p \vee q$ 为真命题；

当 p 与 q 同时为假命题时，$p \vee q$ 为假命题。





全称量词

考虑以下两个命题：

p：任何实数的平方都不小于 0。

q：对于所有的实数 x，都有 $x+1>2$。

在命题 p 中，有一个量词“任何”，我们称它为全称量词 (universal quantifier)，以符号“$\forall$”表示。命题 p 可以写成“$\forall x \in \boldsymbol{R}$，$x^2 \geq 0$”。只有当所有实数的平方都不小于 0，该命题才是真命题。由于我们知道所有实数的平方都不是负数，因此 p 是真命题。

在命题 q 中，“对于所有的”也是全称量词。我们可以将命题 q 写成“$\forall x \in \boldsymbol{R}$，$x+1>2$”。由于我们能够找到一个实数 $x=0$，使得不等式 $x+1>2$ 不成立，因此命题 q 是假命题。能使命题不成立的例子称为反例 (counterexample)。

存在量词

再看以下两个命题：

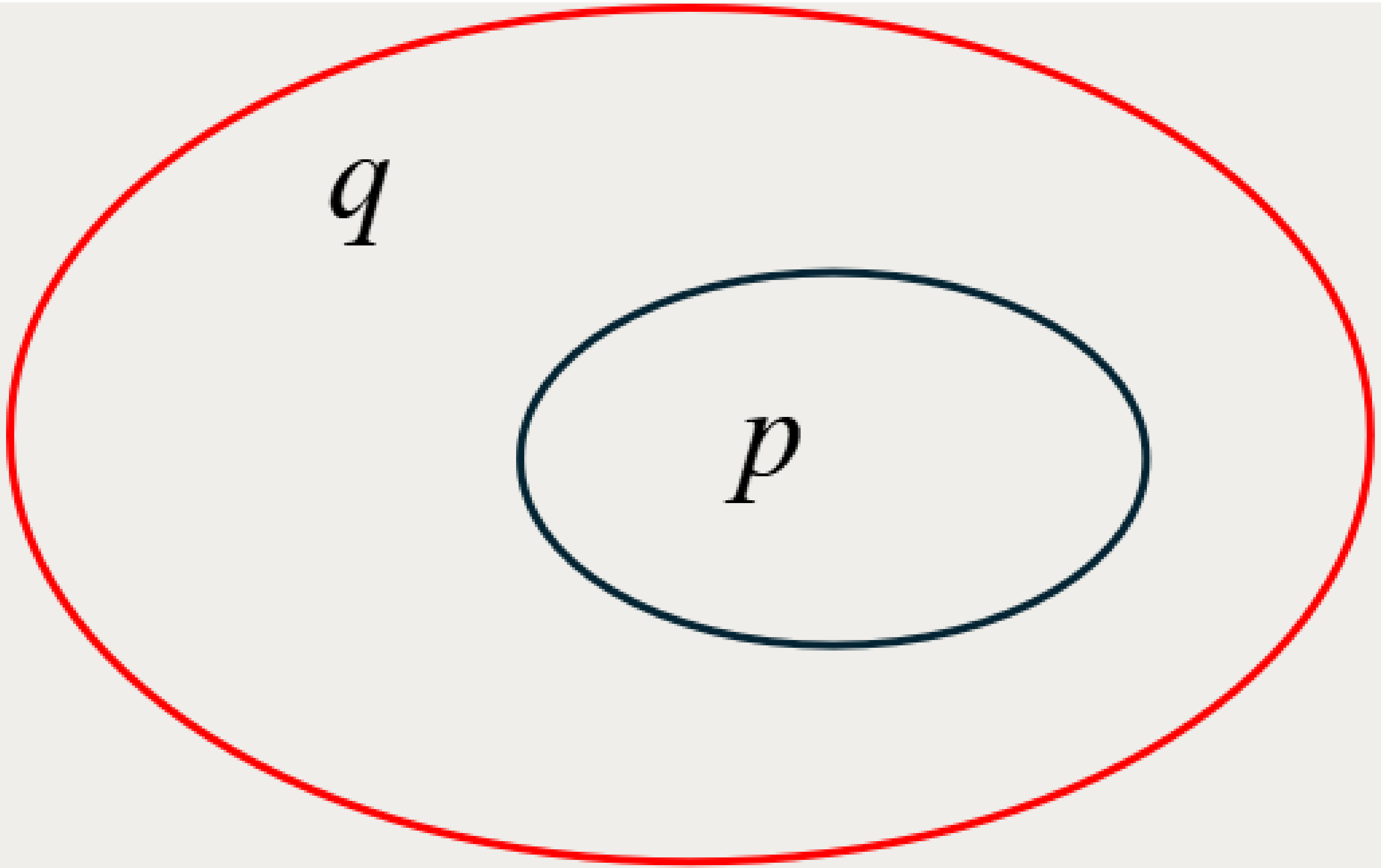
r：有的整数没有因数。

s：存在比 30 大的质数。

在命题 r 中，有一个量词“有的”，我们称它为存在量词 (existential quantifier)，以符号“$\exists$”表示。命题 r 可以写成“$\exists n \in \boldsymbol{Z}$，$n$ 没有因数”。只要我们能够找到一个没有因数的整数，该命题就是真命题，否则就是假命题。然而，每个整数都至少有一个因数 1，因此 r 是假命题。

充分条件、必要条件

一般来说，如果通过推理可以由 p 得出 q，则 $p \rightarrow q$ 为真命题。此时，我们称 p 是 q 的充分条件 (sufficient condition)，而 q 是 p 的必要条件 (necessary condition)。



推理

从一些已有的判断（即已经成立的命题）P_1，P_2，⋯，P_n 推导出新的判断（命题）C 的过程，称为推理 (argument)。这些已有的判断称为前提 (premise)，而新的判断则称为结论 (conclusion)。先看看以下的例子。

P_1：若三角形的三边相等，则此三角形为等边三角形。
P_2：ΔABC 的三边相等。
C ：ΔABC 是等边三角形。

在这种推理形式下，如果 P_1，P_2 皆为真命题，则所得的结论 C 也必定为真。我们可以将上述的推理形式写成

$$\begin{array}{ccc} & p \to q & (P_1) \\ & p & (P_2) \\ \hline \therefore & q & (C) \\ \hline \end{array}$$

习题

1. 写出

(a)

推理

，⋯，P_n 推导出新的判断
的判断称为前提 (premise)，
子。

边三角形。

所得的结论 C 也必定为真。

习题 7.5

1. 写出下列各推理中所缺失的命题使得推理有效：

(a) P_1：由于君君爱好各国美食，所以君君经常四处旅游。

P_2：君君爱好各国美食。

C：____________________。

Chapter 8
角度与弧度

学习目标

★ 认识任意角

★ 了解弧度制与角度制的区别，并掌握弧度与角度的互化

★ 掌握在弧度单位下的弧长及扇形面积的计算

Chapter 8 角度与弧度

学习目标

★ 认识任意角

★ 了解弧度制与角度制的区别，并掌握弧度与角度的互化

★ 掌握在弧度单位下的弧长及扇形面积的计算

任意角探索活动

目的：加强了解任意角的定义。

准备材料：白纸、量角器、尺。

步骤：

1. 请在白纸上分别画出三条水平射线 OA（如下图所示），并以 OA 为始边，用量角器画出

   (a) $120°$ 的终边 OB (b) $-30°$ 的终边 OC (c) $420°$ 的终边 OD

2. 在以上三个图内明确标出角的旋转方向及旋转角度。

工具：https://www.geogebra.org/m/frtsqdj7

https://www.geogebra.org/m/frtsqdj7

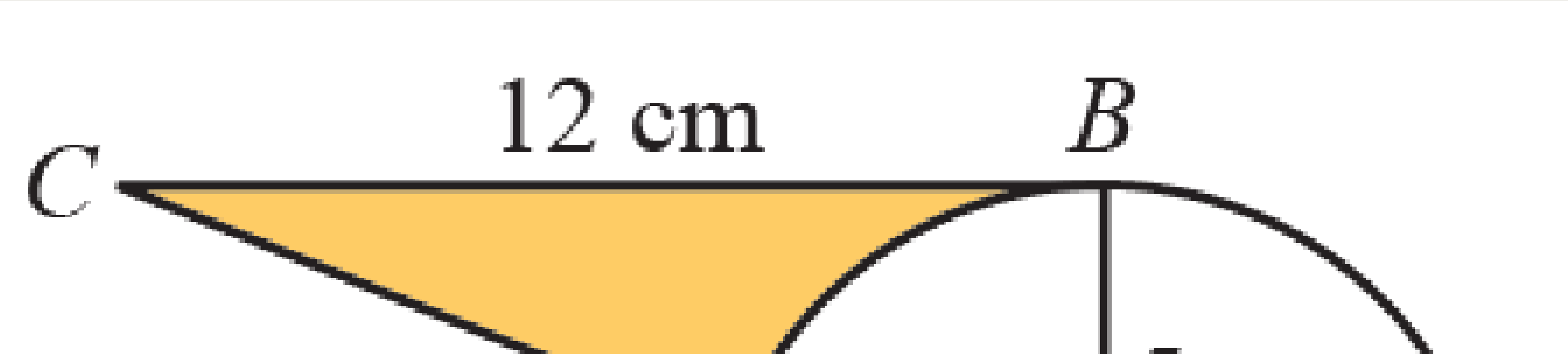
例题附图

例题 5

右图表示一个以点 O 为圆心，半径为 5 cm 的圆，其中直线 BC 为圆在点 B 的切线，求

(a) $\angle AOB$，答案以弧度表示；

(b) 着色部分的周长。



https://bit.ly/4l56Cd9

初中学

$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

数

如

函

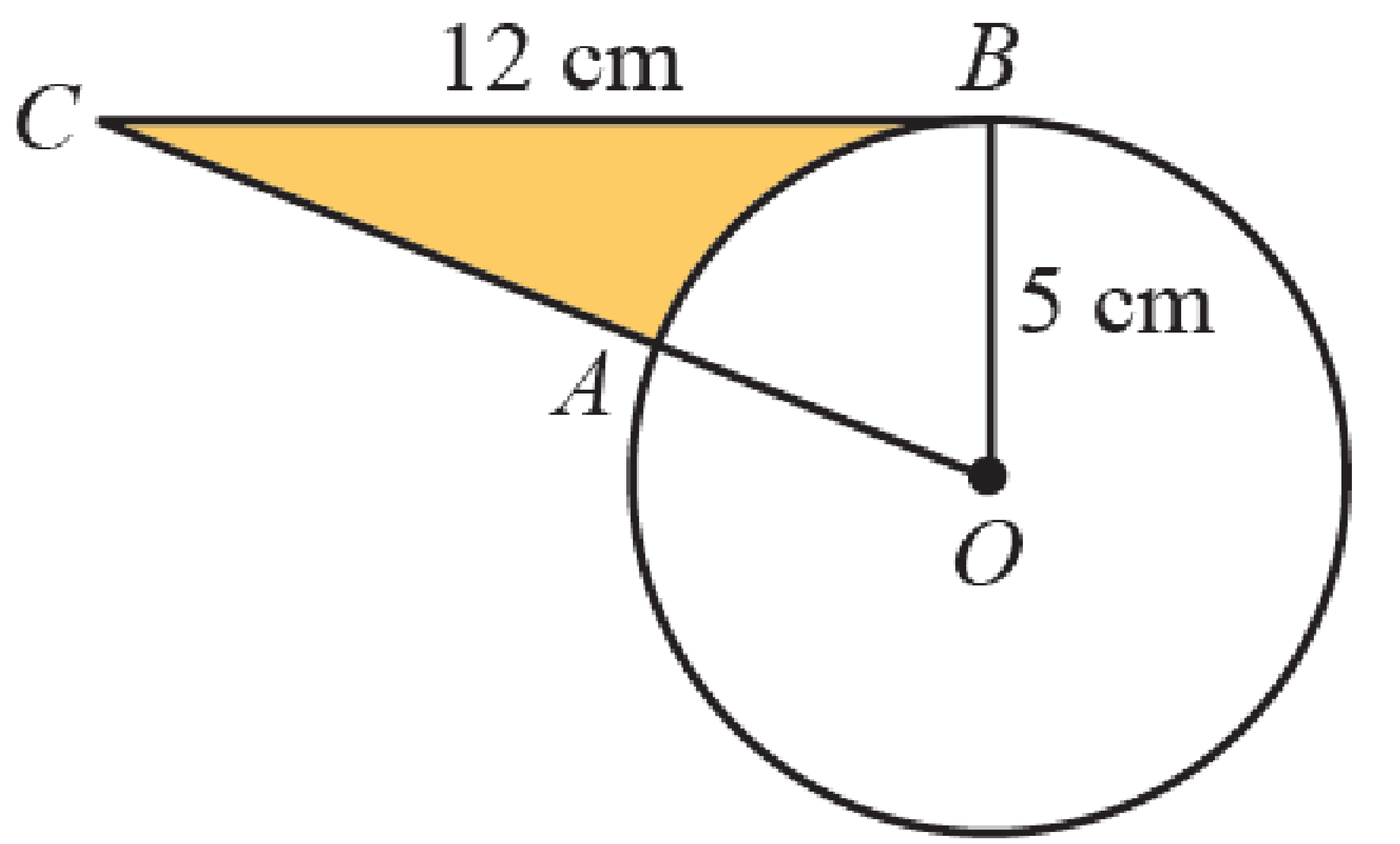
例题附图

例题 5

右图表示一个以点 O 为圆心，半径为 5 cm 的圆，其中直线 BC 为圆在点 B 的切线，求

(a) $\angle AOB$，答案以弧度表示；

(b) 着色部分的周长。



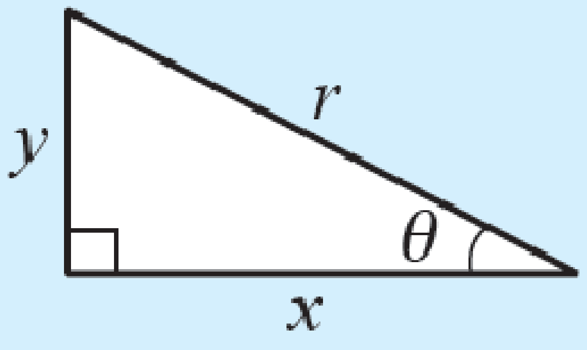
温故知新

初中学过的三角函数有：

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$



https://bit.ly/4l56Cd9

数学橱窗 2

如何使用计算机从三角函数值求得对应的角？

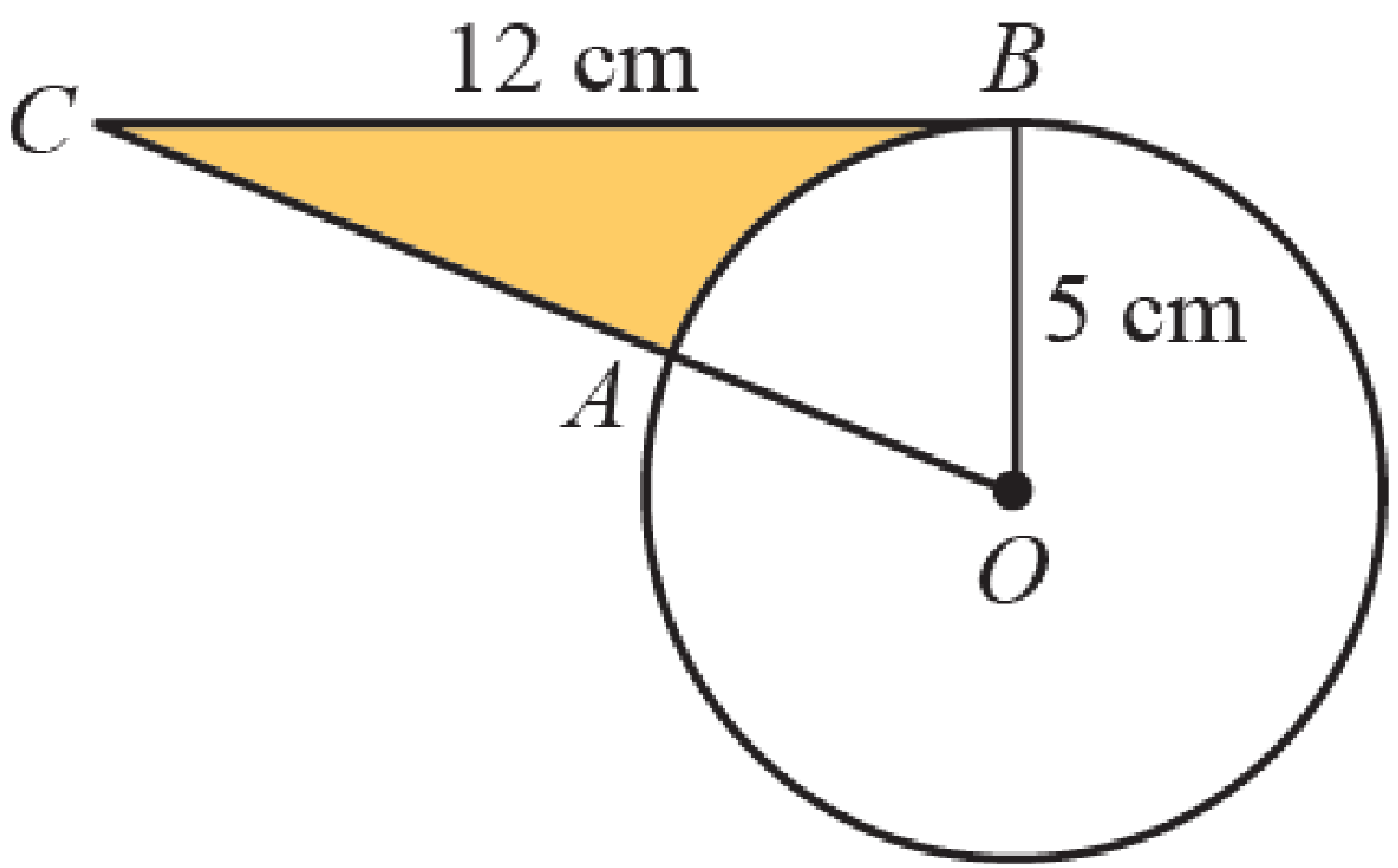
例题附图

例题 5

右图表示一个以点 O 为圆心，半径为 5 cm 的圆，其中直线 BC 为圆在点 B 的切线，求

(a) $\angle AOB$，答案以弧度表示；

(b) 着色部分的周长。



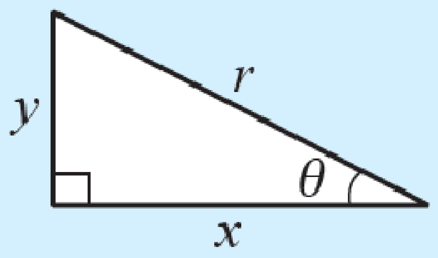
温故知新

初中学过的三角函数有：

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$



https://bit.ly/4l56Cd9

数学橱窗 2

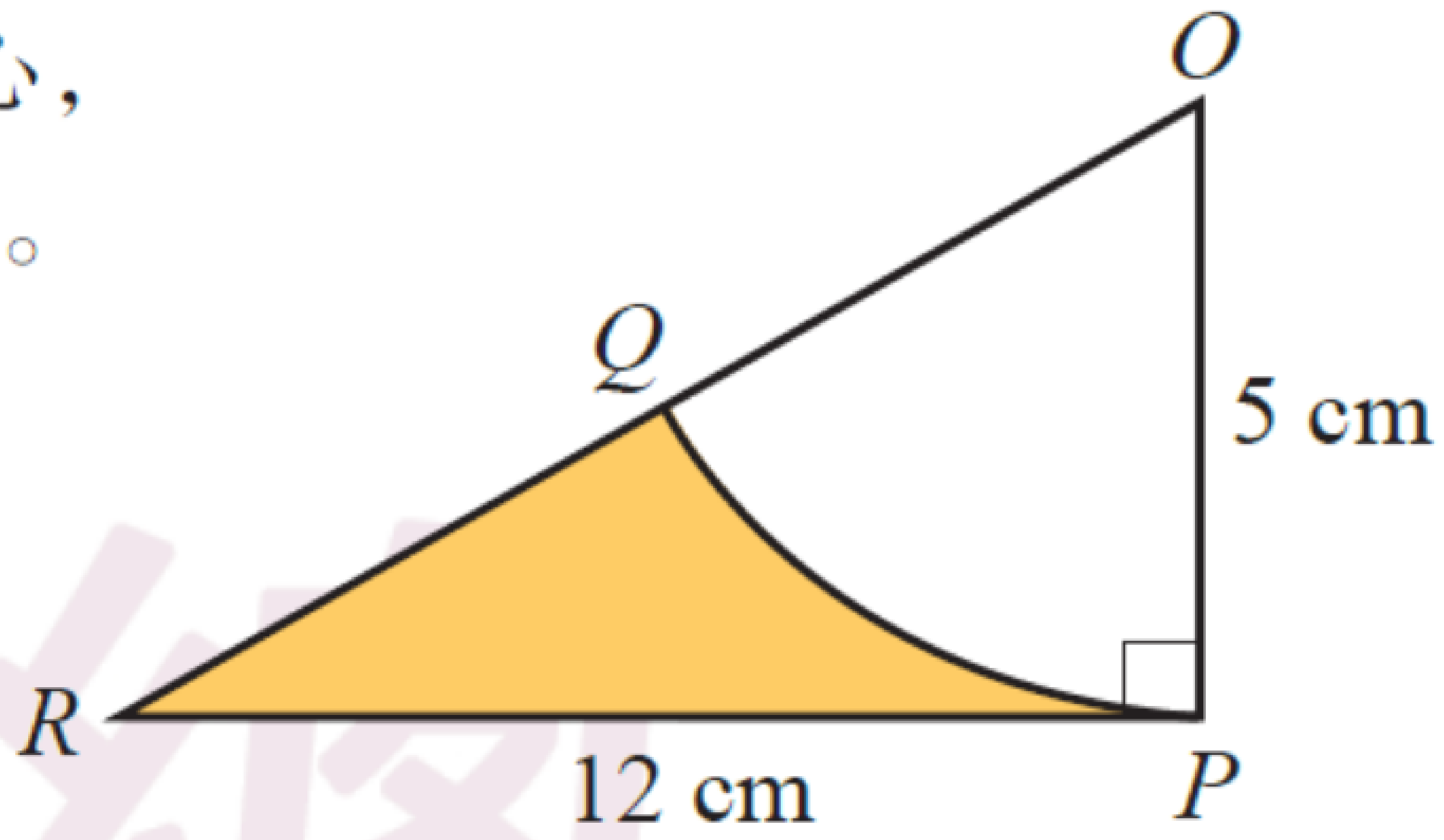
如何使用计算机从三角函数值求得对应的角？

计算机备注

https://bit.ly/4l56Cd9

习题附图

如右图所示，在直角三角形内有一以 O 为圆心，半径为 5 cm 的扇形 OPQ，求着色部分的面积。



Chapter 9
任意角的三角函数

学习目标

★ 理解任意角的三角函数的定义

★ 能判断三角函数值的正负性及计算三角函数值

★ 理解三角函数的图像及其变换

★ 理解反三角函数的定义及相关值域

Chapter9 任意角的三角函数

学习目标

★ 理解任意角的三角函数的定义

★ 能判断三角函数值的正负性及计算三角函数值

★ 理解三角函数的图像及其变换

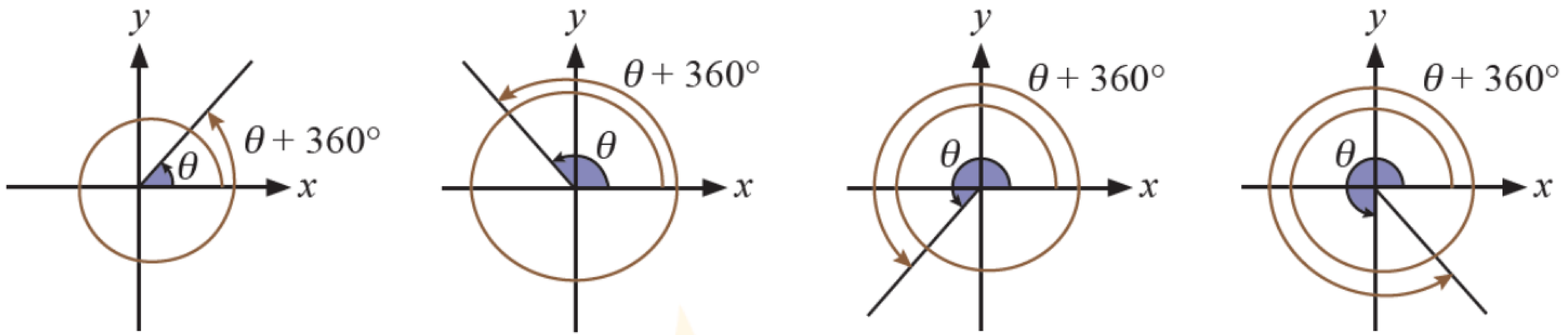
★ 理解反三角函数的定义及相关值域

90° ± θ 的三角函数值与 θ 的三角函数值的关系

https://www.geogebra.org/m/kvhgnsfy

三角函数的诱导公式

$\theta + 360°$ 的三角函数值与 θ 的三角函数值的关系

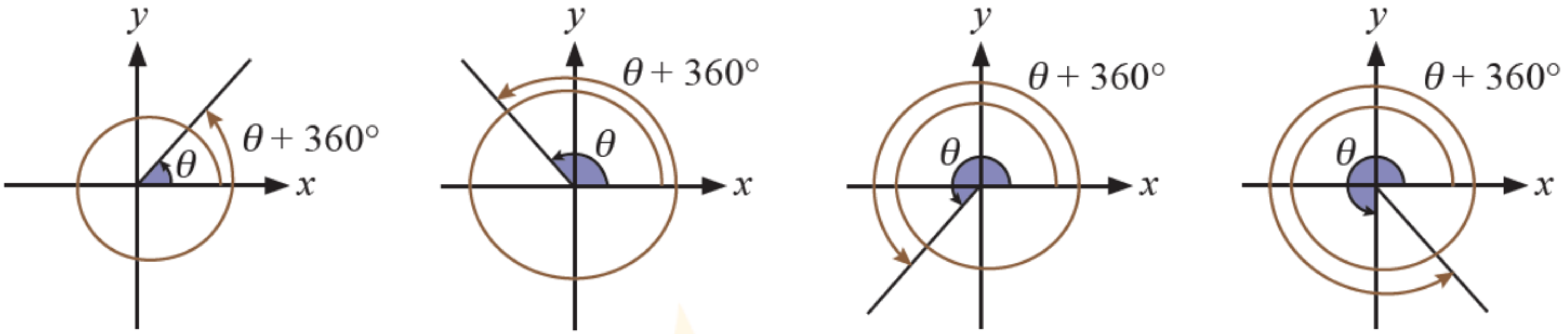


$\theta + k \cdot 360°$ 与 θ 的三角函数值（k 是任意整数）

$$\sin(\theta + k \cdot 360°) = \sin\theta$$

三角函数的诱导公式

$\theta+360°$ 的三角函数值与 θ 的三角函数值的关系



$\theta+k\cdot 360°$ 与 θ 的三角函数值（k 是任意整数）

$$\sin(\theta+k\cdot 360°)=\sin\theta$$

$$\cos(\theta+k\cdot 360°)=\cos\theta$$

$$\tan(\theta+k\cdot 360°)=\tan\theta$$

三角函数诱导公式探索活动

数学橱窗 5

θ 与 $180^\circ \pm \theta$ 及 $270^\circ \pm \theta$ 的三角函数关系

https://www.geogebra.org/m/c3eu5zy3

https://www.geogebra.org/m/c3eu5zy3

三角函数的图像

探索活动 2

目的：探索三角函数的图像。

步骤：

1. 在直角坐标系上，作一以原点 O 为圆心，半径为 1 的单位圆 (unit circle)。
2. 绘出角 θ。
3. 在角 θ 的终边上取其与单位圆的交点 $P(x, y)$。
   由于 $r = OP = 1$，由三角函数的定义，可得
   $\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$。
4. 绘出正弦函数、余弦函数及正切函数的图像，并观察其规律。

数学橱窗 6

三角函数的图像

https://www.geogebra.org/m/vrhkxagj

https://www.geogebra.org/m/vrhkxagj

三角函数图像的性质

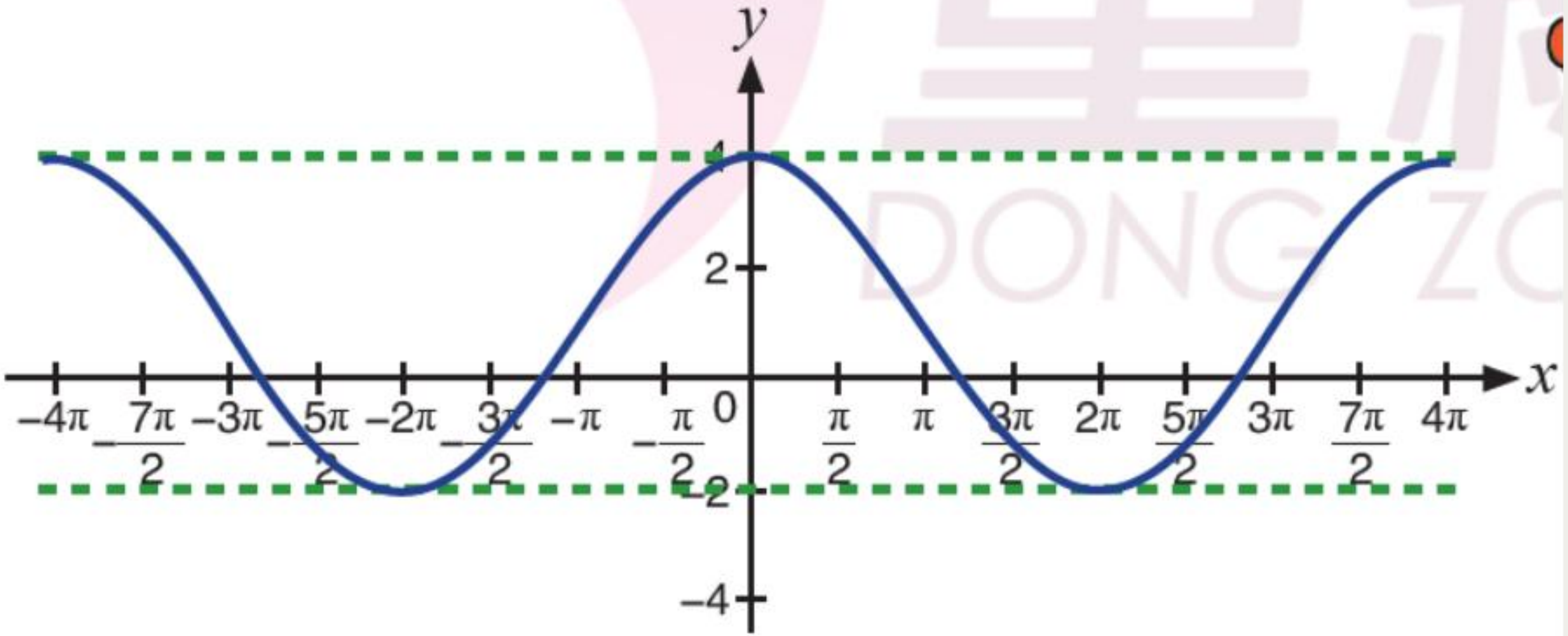
从三角函数的定义及图像，我们可归纳出一些正弦函数、余弦函数及正切函数的性质：

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
定义域	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	$\left\{x \mid x \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\boldsymbol{R}$
最小正周期	2π	2π	π

三角函数图像的变换及例子

例题 11

下图为 $y = a\cos bx + c$ 的图像的一段。求此函数。



数学概

三角函数

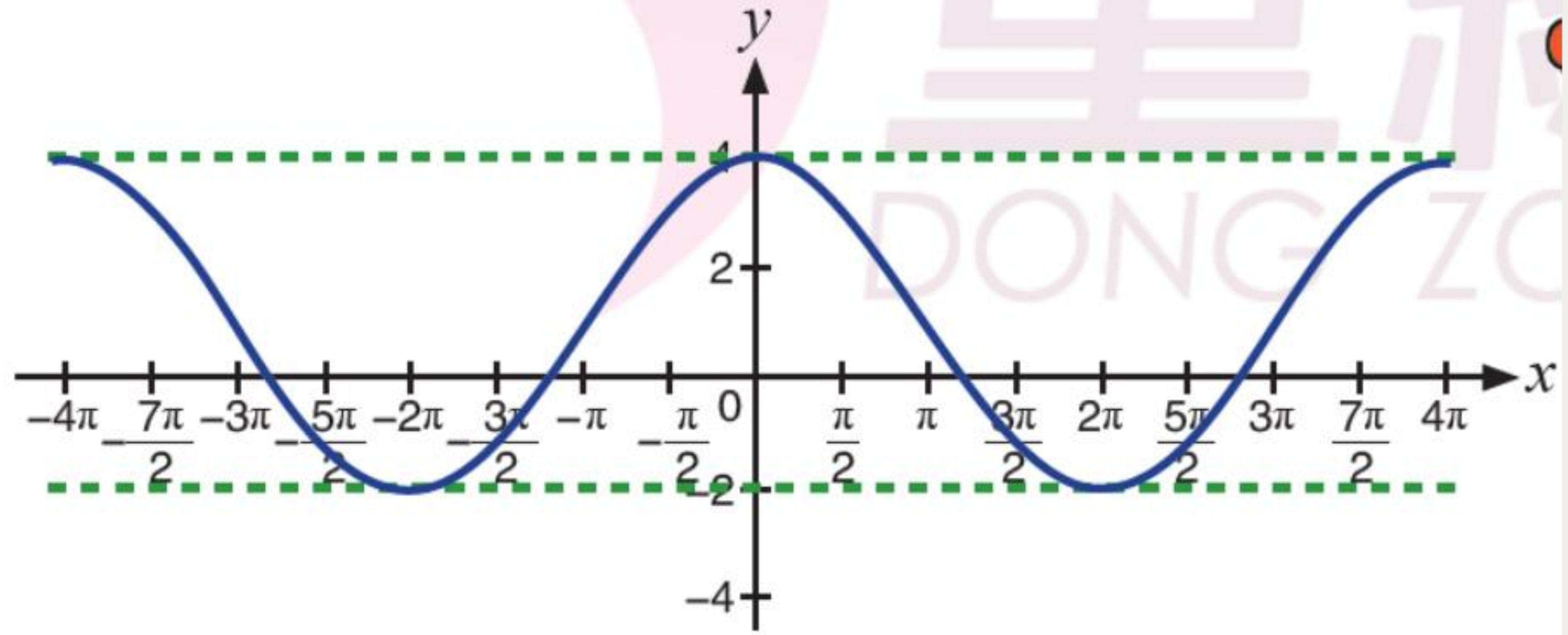
https://www.geoge

https://www

三角函数图像的变换及例子

例题 11

下图为 $y = a\cos bx + c$ 的图像的一段。求此函数。



https://www.geogebra.org/m/axvkzyap

例题 12

求下列各式的函数值：

(a) $\sin^{-1}\frac{1}{2}$

(b) $\sin^{-1}(-0.1)$

数学橱窗 8

使用计算机求反三角函数的值

https://bit.ly/40B8we8

Chapter 10
任意三角形的解法

学习目标

★ 掌握正弦定律及余弦定律，并利用正弦及余弦定律解任意三角形及测量问题

★ 能使用三角形面积公式求任意三角形的面积

Chapter 10 任意三角形的解法

学习目标

★ 掌握正弦定律及余弦定律，并利用正弦及余弦定律解任意三角形及测量问题

★ 能使用三角形面积公式求任意三角形的面积

探索活动-已知三角形两边及其中一边的对角

例题 3

在 ΔABC 中，$AB=\sqrt{6}$，$BC=2$，$A=45°$，求 C。

解 由正弦定律，得 $\dfrac{2}{\sin 45°}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin C}$

$$\sin C=\frac{\sqrt{6}\sin 45°}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$C=60° \quad 或 \quad C=120°$$

目的：例题 3 的探究。
工具：https://www.geo

探索活动-已知三角形两边及其中一边的对角

$= 45°$，求 C。

C

$\sin 45°$

2

或 $C = 120°$

目的：**例题 3 的探究。**

工具：https://www.geogebra.org/m/kyvdm6va

例题

例题 5

在 ΔABC 中，已知 $B=60°$，且外接圆半径 $R=1$，求 AC 的长。（答案以根式表示）

解 由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，得

$$\frac{AC}{\sin B}=2R$$

$$\frac{AC}{\sin 60°}=2\times 1$$

$$\begin{aligned} AC &= 2\sin 60° \\ &= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

例题 8

在 ΔABC 中，AB : B

解 设 $AB=3k$，BC

根据三角形的边

$\angle A$。

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2 -}{2bc}$

$=\dfrac{(5k)^2+(}{2(5}$

$=-\dfrac{1}{2}$

$A=120°$

$\therefore$ 最大内角为 1

例题

案以根式表示）

例题 8

在 ΔABC 中，$AB : BC : AC = 3 : 7 : 5$，求此三角形的最大内角。

解 设 $AB = 3k$，$BC = 7k$，$AC = 5k$。

根据三角形的边角关系，最长的边所对的角最大，所以我们要计算 BC 的对角 $\angle A$。

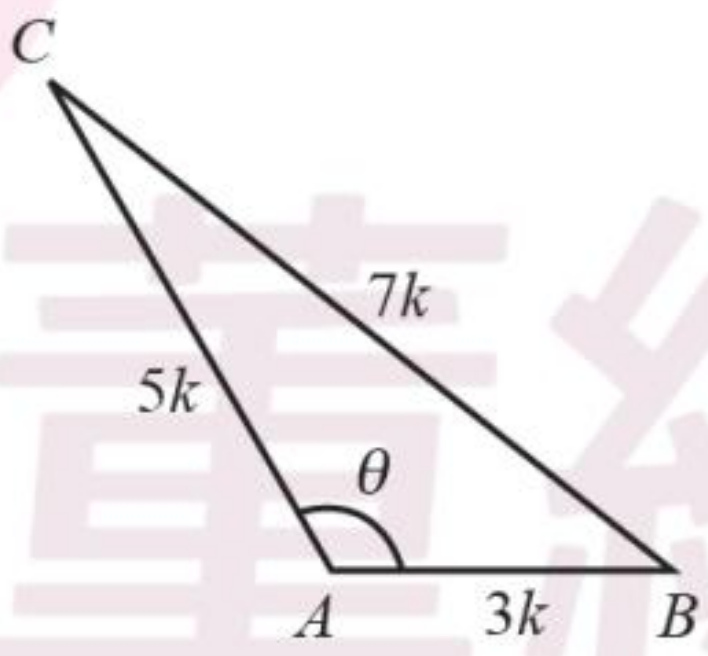
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2(5k)(3k)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$A = 120°$$

$\therefore$ 最大内角为 120°。



注意

在例题 8 中，$AB : BC : AC = 3 : 7 : 5$ 是三角形各边长的比。a，b 及 c 的实际长度分别为 $7k$，$5k$ 及（k 是常数）。

已知三角形的三边，求三角形的面积。

已知 ΔABC 的三边 a、b、c，其面积的公式为

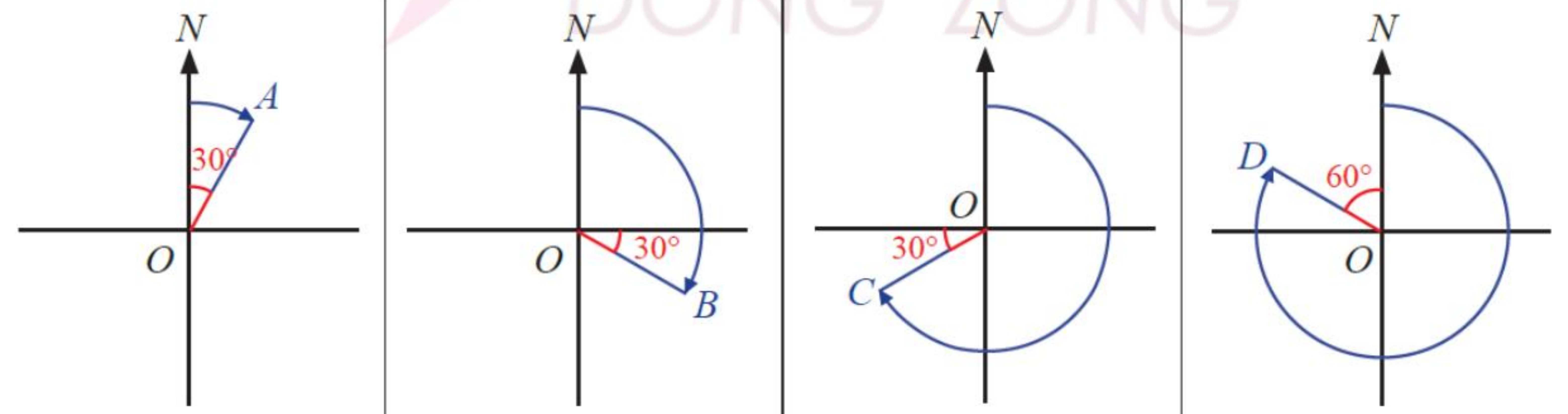
$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

其中半周长 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$。

上述公式称为海龙公式 (Heron's formula)。

方位角

在测量工作中，方位角 (bearing) 常用来度量目标相对于测量点的方向。当采用方位角时，所有方向都是从正北方依顺时针方向旋转至目标而量度的。方位角的度数必须写成三位数的形式，它的取值范围介于 000° 至 360° 之间。



由 O 测得 A 的方位角是 030°

由 O 测得 B 的方位角是 120°

由 O 测得 C 的方位角是 240°

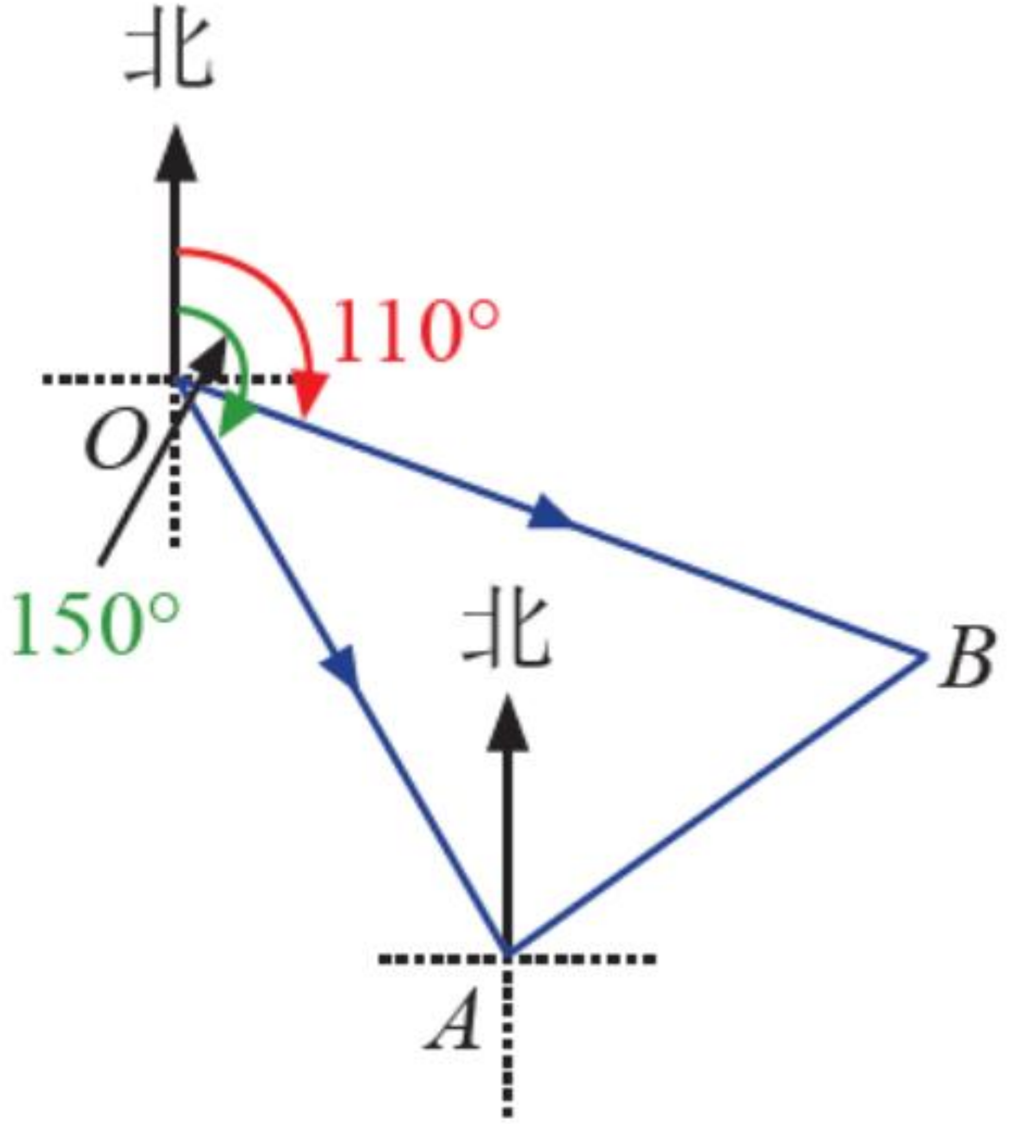
由 O 测得 D 的方位角是 300°

方位角习题附图

两艘船 A、B 同时从码头 O 出发，两船的航行资讯如下：

- 船 A 以每小时 50 海里的速度沿方位角为 150° 的方向航行；
- 船 B 以每小时 60 海里的速度沿方位角为 110° 的方向航行。

求两小时后，由船 A 测得船 B 的方位角。（准确至 1°）



第 5 题用图

Chapter 11 三角恒等式与三角方程式

学习目标

★ 掌握同角三角函数的基本关系式，并能运用这些关系式化简三角函数式及证明三角恒等式

★ 掌握三角函数公式（两角和、两角差、倍角公式），并能利用这些公式化简三角函数及证明三角恒等式

★ 掌握三角方程式有条件的解

Chapter 11

三角恒等式与三角方程式

学习目标

★ 掌握同角三角函数的基本关系式，并能运用这些关系式化简三角函数式及证明三角恒等式

★ 掌握三角函数公式（两角和、两角差、倍角公式），并能利用这些公式化简三角函数及证明三角恒等式

★ 掌握三角方程式有条件的解

例题

例题 1

化简下列各式:

(a) $\sec\theta \cdot \cot\theta \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$

(b) $(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)\tan^2\theta$

(c) $(\cot A \sec A)^2 - (\cos A \operatorname{cosec} A)^2$

例题 2

证明 cos

证 cos

例题

$\cos\theta$

$A \operatorname{cosec} A)^2$

例题 2

证明 $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$。

证 $$\begin{aligned}\cos^2\theta - \sin^2\theta &= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) \\ &= \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1\end{aligned}$$

习题

证明下列各恒等式（4 至 8）：

4. $\sin(\theta + 45°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta)$

5. $\sin(\alpha + \beta)\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)\sin\beta = \sin\alpha$

6. $\cot\beta - \cot\alpha = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

7. $\dfrac{\cos 3A}{\sec B} - \dfrac{\sin 3A}{\operatorname{cosec} B} = \cos(3A + B)$

8. $\cos(A + B) + \sin(A - B) = (\cos A + \sin A)(\cos B - \sin B)$

三角方式有条件的解

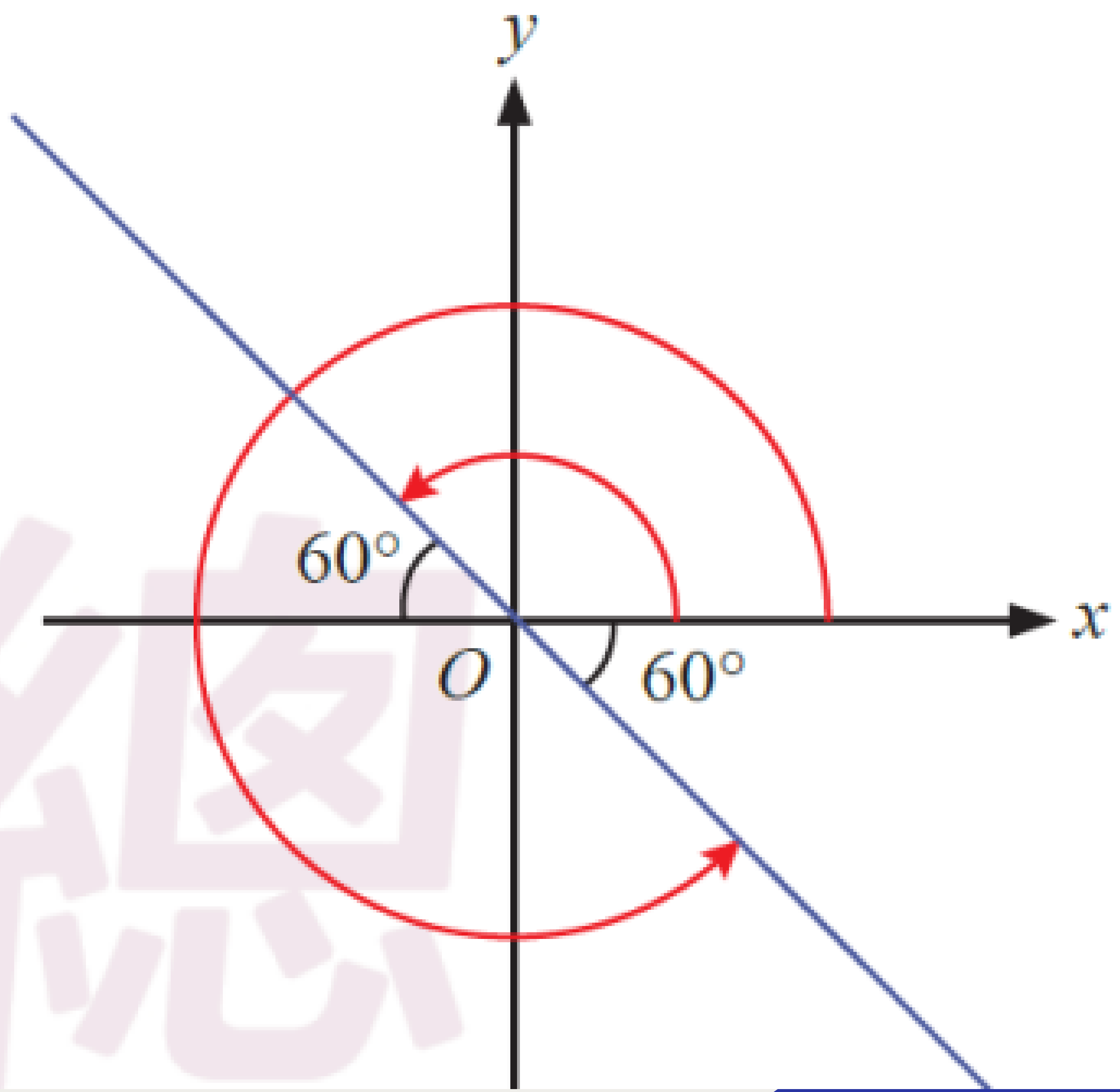
例题 22

解方程式 $\tan x = -\sqrt{3}$，$0° \le x \le 360°$。

解 因为 $\tan x = -\sqrt{3}$ 是负值，所以 x 是第二象限的角或第四象限的角。

$\tan^{-1}\sqrt{3} = 60°$，即正切为 $\sqrt{3}$ 的相伴锐角是 $60°$。

$\therefore\ x = 120,\ 300°$



例题 26

例题 31

解方程式 $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$，$0 \le x \le 2\pi$

三角方式有条件的解

例题 26

解方程式 $\sin(x-60^\circ)=-\dfrac{1}{2}$，$0^\circ<x<360^\circ$。

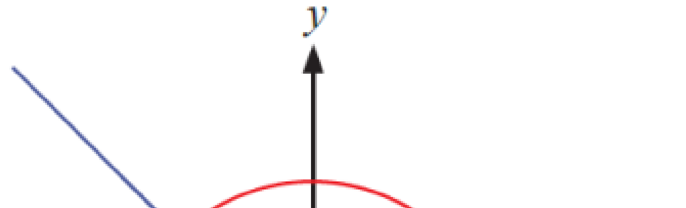
解 由条件 $0^\circ<x<360^\circ$，得 $-60^\circ<x-60^\circ<300^\circ$。

$\therefore\ x-60^\circ=210^\circ,\ -30^\circ$

$x=270^\circ,\ 30^\circ$

例题 22

解方程式 $\tan x=-\sqrt{3}$，$0^\circ<x<360^\circ$。



例题 31

解方程式 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$，$0\le x\le 2\pi$

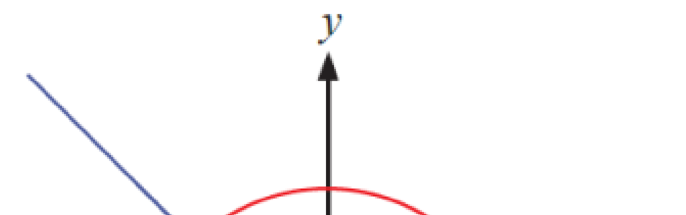
三角方式有条件的解

例题 31

解方程式 $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$，$0 < x \leq 2\pi$。

例题 22

解方程式 $\tan x = -\sqrt{3}$，$0^\circ < x < 360^\circ$。



例题 26

Q&A